**CHỦ ĐỀ 3: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN**

**ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.**

**I/ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.**

**1. Định nghĩa đường tròn.**

\* Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R.

\* Kí hiệu: (O ; R) hoặc (O).

**2. Điểm thuộc và không thuộc đường tròn.**

\* Điểm M ∈ (O ; R) hay M nằm trên đường tròn hay (O) đi qua M ⬄ OM = R.

\* Điểm N nằm ngoài đường tròn ⬄ ON > R

**** \* Điểm P nằm trong đường tròn ⬄ OP < R

**3. Đường kính của đường tròn.**

Đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn và đi qua tâm O gọi là đường kính của đường tròn tâm O.

Tâm O của đường tròn là trung điểm của đường kính.

**4. Cách xác định đường tròn.**

Một đường tròn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

**5. Chú ý.**

\* Qua ba điểm không thẳng hàng A , B , C ta vẽ được một đường tròn duy nhất có tâm là giao điểm ba đường trung trực của ∆ABC.

\* Qua hai điểm A , B cho trước ta vẽ được vô số đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

\* Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

**6. Tâm đối xứng và trục đối xứng của đường tròn.**

\* Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

\* Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó

=> Một đường tròn chỉ có duy nhất một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

**II/ ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.**

**1. Dây của đường tròn.**

Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đường tròn gọi là dây của đường tròn đó.

 Ví dụ: Dây MN của (O)

Đường kính AB cũng được gọi là dây của (O).

**2. So sánh độ dài đường kính và dây.**

Định lý 1: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

**3. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.**

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

**BÀI TẬP CHỦ ĐỀ 3**

**I/ PHƯƠNG PHÁP.**

\* Trong một đường tròn **đường kính** là dây lớn nhất.

\* Trong một đường tròn:

*+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.*

*+ Đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.*

\* Để chứng minh các điểm thuộc một đường tròn: **cần nhớ:**

***+*** *Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm vòng tròn ngoại tiếp*

*+ Trong tam giác đều , tâm vòng tròn ngoại tiếp là trọng tâm tam giác đó.*

*+ Trong tam giác thường:*

*- Tâm vòng tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của 3 cạnh tam giác đó*

*- Tâm vòng tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác đó*

*- Các đỉnh của hình chữa nhật cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.*

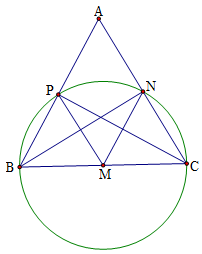
*- Các đỉnh của hình vuông cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.*

**=> PHƯƠNG PHÁP:** *Để chứng minh các điểm  cùng thuộc một đường tròn ta chứng minh các điểm  cách đều điểm  cho trước.*

**II/ BÀI TẬP MẪU.**

**Ví dụ 1.** Cho tam giác đều có cạnh bằng .  là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

**Giải**

Vì tam giác  đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao .

*  lần lượt vuông góc với .
* các tam giác  là tam giác vuông với  là cạnh huyền
* 
* Các điểm  cùng thuộc đường tròn Đường kính , tâm đường tròn là Trung điểm của 

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác  có Gọi  lần lượt là trung điểm của . Chứng minh 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó

**Giải**

Kéo dài  cắt nhau tại điểm  thì tam giác  vuông tại .

+ Có  là đường trung bình của tam giác  => ****

**+ ** là đường trung bình của tam giác  => .

Mặt khác .

Chứng minh tương tự ta cũng có: .

Suy ra  là hình chữ nhật.

Hay các điểm  thuộc một đường tròn có tâm là giao điểm  của hai đường chéo 

**Ví dụ 3.** Cho tam giác  cân tại  nội tiếp đường tròn . Gọi  là trung điểm của ;  là trọng tâm của tam giác . Gọi  là giao điểm của  và . Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

**Giải**

Vì tam giác  cân tại  nên tâm  của vòng tròn ngoại tiếp tam giác nằm trên đường trung trực của .Gọi là giao điểm của  và 

Dựng các đường trung tuyến của tam giác  cắt nhau tại trọng tâm .Do . Gọi là giao điểm của  và  thì  là trọng tâm của tam giác  suy ra .

Mặt khác ta có  suy ra  hay  là trực tâm của tam giác .

Như vậy tam giác  vuông tại .

Do đó tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác  là trung điểm  của .

**Ví dụ 4.** Cho hình thang vuông  có . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên ;  là trung điểm của . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác 

**Giải**

Gọi  là trung điểm của  thì  là đường trung bình của tam giác  suy ra , mặt khác 

=>  là trực tâm của tam giác  => .

Do  nên  là hình bình hành

Suy ra .

Từ đó ta có:  hay tam giác  vuông tại  nên tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác  là trung điểm của .

Ta có .

**Ví dụ 5.** Cho lục giác đều  tâm . Gọi  là trung điểm của .  cắt  tại . Chứng minh rằng các điểm nằm trên một đường tròn

**Giải**



 là lục giác đều =>  nằm trên đường tròn đường kính .

Vì tam giác  nên điểm  cách đều =>  là phân giác trong của góc 

Kẻ (Do  là đường trung bình của tam giác 

Kẻ  (Do  với )

Do 

=>  cách đều  hay  là phân giác ngoài của .

Vậy 5 điểm  cùng nằm trên một đường tròn đường kính .

**Ví dụ 6.** Cho hình vuông . Gọi  là trung điểm  là điểm thuộc đường chéo  sao cho . Chứng minh 4 điểm  nằm trên cùng một đường tròn

**Giải**

Ta thấy tứ giác  có  nên để chứng minh 4 điểm  cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh 

**Cách 1:** Kẻ đường thẳng qua  song song với  cắt  tại .

Xét ∆vuông và ∆vuông có 

=>  =>  => ∆ vuông tại .

Suy ra 4 điểm  cùng nằm trên đường tròn đường kính 

**Cách 2:** Gọi  là trung điểm của  với  là giao điểm của hai đường chéo.

Dễ thấy  là hình bình hành nên suy ra .

Mặt khác do  là trực tâm của tam giác .

**Ví dụ 7.** Cho tam giác  có trực tâm . Lấy điểm  thuộc tia  sao cho  và nằm giữa . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên . Chứng minh cácđiểm  cùng thuộc một đường tròn

**Giải**

Giả sử  cắt  tại . Ta có  do cùng vuông góc với  suy ra  ( góc đồng vị) .

Tương tự ta cũng có  kết hợp với giả thiết  .

Mặt khác ta có  nên  hay  thuộc đường tròn đường tròn đường kính .

Dễ thấy  nên cácđiểm  cùng thuộc một đường tròn.

**II/ BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) So sánh KH và BC.

**Bài 2:** Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Vẽ (O) đ­ường kính BC, nó cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E.

a) Chứng minh: CD AB; BE AC.

b) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: AK  BC.

**Bài 3:** Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC vuông tại A điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, DC, BC, BE. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 5:** Hình thoi ABCD có . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, B, F, G, D, H thuộc cùng một đường tròn.

**Bài 6:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường (O). Đường tròn (I) đường kính OA cắt OC tại D. Vẽ CH AB.

a) Chứng minh A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OD = OH. Từ đó chỉ ra HD // AC.

**Bài 7:** Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có , CD = 2AD. Chứng minh các điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 8:** Cho (O) đường kính MN, I thuôc OM, K thuộc ON. Qua I, K vẽ các dây AB và CD vuông góc với MN

a) C/m MN là đường trung trực của AB và CD

b) C/m ABCD là hình thang cân

**Bài 9:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm trên AB (điểm M khác O). Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử R = 6cm ; MA = 4cm. Tính CD.

c)\* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: .

**Bài 10:** Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử . Tính OM theo R sao cho .

**Bài 11:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn . Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

**Bài 12:** Cho hình chữ nhật , kẻ  vuông góc với . Trên  ta lấy các điểm  sao cho . Chứng minh  điểm  nằm trên một đường tròn.

**Gợi ý:** , hãy chứng minh 

**CHỦ ĐỀ 4: DÂY – KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM TỚI DÂY.**

****1. Định lý 1:** Trong một đường tròn:

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

**Tóm tắt:** Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ OH  MN tại H, OK  PQ tại K.

\* Nếu MN = PQ => OH = OK

**\* Nếu OH = OK => MN = PQ

**2. Định lý 2.** Trong hai dây của một đường tròn:

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

**Tóm tắt:** Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ OH  MN tại H, OK  PQ tại K.

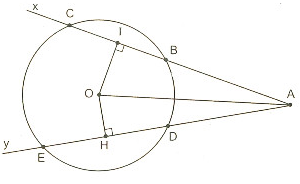
\* Nếu PQ > MN => OK < OH

\* Nếu OK < OH => PQ > MN

**BÀI TẬP CHỦ ĐỀ 4**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ tia Ax cắt (O) tại B, c và tia Ay cắt (O) tại D, E sao cho xÂO > yÂO. So sánh các dây DE và BC.

Hướng dẫn

 Kẻ OI ⊥ BC, OH ⊥ DE thì

OI = OA.sinOÂx

OH = OA.sinOÂy

Mà OÂx > OÂy nên sin OÂx > sin OÂy

=> OI > OH => BC < DE (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây).

**Bài 1:** Cho (O; 5cm), dây AB = 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho AI = 1cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh CD = AB.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF ?

**Bài 3:** Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: EH = EK và EA = EC.

**Bài 4:** Cho (O), hai dây AB, CD (AB < CD), các tia AB và CD cắt nhau tại K nằm bên ngoài đường tròn. Đường tròn (O; OK) cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh: KM < KN.

**Bài 5:** Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại I nằm bên ngoài đường tròn. Chứng minh:

a) IO là phân giác góc 

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: O, M, I, N cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 6:** Cho (O), các bán kính OA, OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Gọi C là giao điểm của AM và BN. Chứng minh:

a) OC là phân giác góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

**Bài 7:** Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử . Tính OM theo R sao cho .

**Bài 8:** Cho tam giác ABC (AB < AC ), kẻ hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn . xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Chứng minh AB.AE = AC.AD

c)Gọi  Klàđiểmđốixứngcủa H qua I. Chứng minh rằng: BHCK làhìnhbìnhhành.

d) Xácđịnhtâm O củađườngtròn qua 4 điểm A, B, K, C.

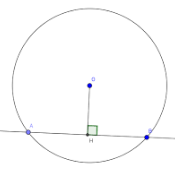
e) Chứng minh OI // AH.

**CHỦ ĐỀ 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN**

**TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN.**

**A/ LÝ THUYẾT.**

**Gọi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng là OH**

****

**1. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt:**

⬄ đường thẳng có hai điểm chung  với đường tròn ⬄ OH < R

**2. Đường thẳng  và đường tròn  không giao nhau.**

⬄ Đường thẳng  và đường tròn  không có điểm chung

⬄

**3. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.**

⬄đường thẳng  chỉ có một điểm chung với đường tròn ⬄ OH = R.



**4. Tiếp tuyến của đường tròn.**

 là tiếp tuyến của đường tròn  tại điểm H ⬄∆tiếp xúc với đường tròn tại H

Điểm  gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn . Ta có 

\* Nếu  là tiếp tuyến của  thì  vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

\* Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm

+ Tia kẻ từ điểm đó đến tâm  là tia phân giác góc tạo bởi 2 tiếp tuyến

+Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

+ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó thì vuông góc với đoạn thẳng nối hai tiếp điểm tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

**4. Đường tròn nội tiếp tam giác**

+ là đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh tam giác là

**+** có tâm là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác

**5. Đường tròn bàng tiếp tam giác**

**+** là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài hai cạnh kia

+ Đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc có tâm là giao điểm của hai đường phân giác ngoài góc và góc 

+ Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.



**B/ BÀI TẬP VỀ TIẾP TUYẾN**

**I/ Phương pháp: Xét (O, R) và đường thẳng d**

**\* Bài toán về khoảng cách OH từ tâm O tới đường thẳng d khi d cắt (O) tại hai điểm.**

**Xét .** Theo định lý Pitago ta có: 

Mặt khác ta cũng có: 

=>



**CÁC KẾT QUẢ THU ĐƯỢC**

+ Nếu  nằm ngoài đoạn  thì 

+ Nếu nằm trong đoạn  thì 

+ Mối liên hệ khoảng cách và dây cung: 

**\* Để chứng minh một đường thẳng d là tiếp tuyến (tiếp xúc) với đường tròn (O, R):**

**+ Cách 1:** Chứng minh khoảng cách từ O đến d bằng R. Hay nói cách khác ta vẽ OH d, chứng minh OH = R.

**+ Cách 2:** Nếu biết d và (O) có một giao điểm là A, ta chỉ cần chứng minh OA d.

**+ Cách 3:** Sử dụng phương pháp trùng khít (Cách này sẽ được đề cập trong phần **góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây)**

**II/ BÀI TẬP MẪU.**

**Ví dụ 1.**Cho hình thang vuông  có  là trung điểm của  và góc . Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính 

**Giải**

Kéo dài  cắt  tại  vì  suy ra .

Vì  nên xét ∆vuông và ∆vuông ta có

 chung

.

 =>=>∆ cân tại .

Kẻ  thì 

mà  hay  thuộc đường tròn .

Do đó  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .

**Ví dụ 2.**Cho hình vuông  có cạnh bằng . Gọi  là hai điểm trên các cạnh  sao cho chu vi tam giác  bằng . Chứng minh đường thẳng  luôn tiếp xúc với  đường tròn cố định

**Giải**

Trên tia đối của  ta lấy điểm  sao cho .

Ta có .

Theo giả thiết ta có:



Suy ra .

Từ đó ta suy ra .

Kẻ .

Vậy  thuộc đường tròn tâm  bán kính  suy ra  luôn tiếp xúc với đường tròn tâm  bán kính bằng .

**Ví dụ 3.**Cho tam giác  cân tại  đường cao . Trên nửa mặt phẳng chứa  bờ  vẽ  cắt đường tròn tâm  bán kính  tại . Chứng minh  là tiếp tuyến của 

**Giải**

Vì tam giác  cân tại  nên ta có: .

Vì .

Mặt khác ta cũng có .

Hai tam giác  và  có  chung, , 

suy ra  suy ra .

Nói cách khác  là tiếp tuyến của đường tròn 

**Ví dụ 4.**Cho tam giác  vuông tại đường cao . Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Đường tròn tâm  đường kính cắt  tại . Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn 

**Giải**

****Vì tam giác  có một cạnh  là đường kính của  nên .

Kẻ  suy ra  từ đó ta có tam giác  cân tại .

Do đó  (cùng phụ với góc hai góc bằng nhau là )

Mặt khác ta cũng có:  (do tam giác  cân tại ).

Mà  suy ra  hay  là tiếp tuyến của .

**Ví dụ 5.**Cho tam giác vuông tại đường cao . Vẽ đường tròn tâm  bán kính  kẻ các tiếp tuyến  với  ( là các tiếp điểm khác ). Chứng minh  tiếp xúc với đường tròn đường kính 

**Giải**

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhu có:.

Suy ra 

hay thẳng hàng.

Gọi  là trung điểm của  thì  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

Mặt khác  nên  là đường trung bình của hình thang vuông 

Suy ra  tại . Nói cách khác  là tiếp tuyến của đường tròn . Đường kính 

**III/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D.Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với phân giác góc ODC, đường này cắt CD tại M. Chứng minh rằng đường thẳng d qua M song song với AB luôn tiếp xúc với (O) khi C thay đổi.

**Bài 2:**Cho tam giác ABC nhọn. Vẽđườngtròntâm O đườngkính BC cắt AB, AC lầnlượttại E và F. BF và CE cắtnhautại I. Gọi M làtrungđiểm AI. Chứng minh: MF làtiếptuyếncủa (O).

**Bài 3:** Cho đườngtròn (O;R) cóđườngkính BC, lấyđiểm A thuộc (O) saocho AB=R

a. Chứng minh tam giác ABC vuôngvàtínhđộdài BC theo R.

b. Tiếptuyếntại A của (O) cắtđườngthẳng BC tại M. Trên (O) lấyđiểm D saocho MD=MA (D khác A). Chứng minh MD làtiếptuyếncủa (O).

**Bài 4:** Cho tam giác ABC đềunộitiếpđườngtròn (O), AB= 4. Đườngkính AD cắt BCtại H. Đườngthẳng BO cắttiếptuyếntại A củađườngtròn (O) ở điểm E.

a. Chứng minh AH vuônggócvới BC, tínhđộdài AH vàbánkínhcủađườngtròn (O).

b. Chứng minh EC làtiếptuyếncủa (O) vàtứgiác ABCE làhìnhthoi.

**Bài 5:** Cho nửađườngtròntâm O đườngkính AB=2R. Trên nửa đường tròn lấyđiểm C (C khácAvà B). Gọi D làgiaođiểmcủađườngthẳng BC vớitiếptuyếntại A củanửađườngtròntâm O và I làtrungđiểm AD.

a. Chứng minh BC.BD=4R2

b. Chứng minh IC làtiếptuyếncủanửađườngtròntâm O.

**Bài 6.**Cho tam giác ABC nhọn, đườngcao BD và CE cắtnhaitại H. Gọi I làtrungđiểmcủa BC.Chứng minh rằng ID, IE làtiếptuyếncủađườngtrònngoạitiếp tam giác ADE.

**Bài 7:** Cho đườngtròn (O) đườngkính AB. Ax, Bylà 2 tiatiếptuyếncủa (O) (Ax, By cùngnửamặtphẳngbởlàđườngthẳng AB). Trên Ax lấyđiểm C, trên By lấyđiểm D saochogóc COD bằng 90^0 .Chứng minh rằng: CD tiếpxúcvớiđườngtròn (O).

**Bài 8.** Cho đườngtròntâm O đườngkính AB. Mộtnửađườngthẳng qua A cắtđườngkính CD vuônggócvới AB tại M vàcắt (O) tại N.

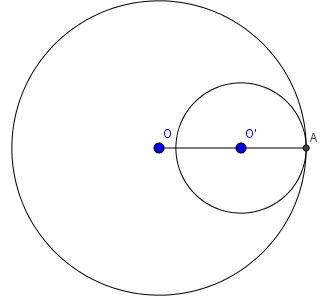
a. Chứng minh AM.AN = AC2

b. Chứng minh đườngtrònngoạitiếp tam giác CMN tiếpxúcvới AC tại C.

**CHỦ ĐỀ 6: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.**

Xét hai đường tròn  và giả sử R > R’

**I/ Hai đường tròn tiếp xúc nhau:** chỉ có một điểm chung

****

**1. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:**

+ Điều kiện .

+ Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

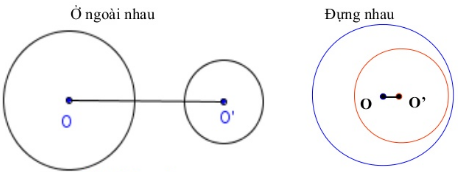
**2. Hai đường tròn tiếp xúc trong tại A.**

+ Điều kiện: OO’ = R – R’ = OA – O’A

+ Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

**II/ Hai đường tròn không giao nhau:** không có điểm chung.

****

**1. Hai đường trong ở ngoài nhau.**

+ Điều kiện: OO’ > R + R’

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

**2. Hai đường tròn đựng nhau.**

+ Điều kiện: OO’ < R - R’

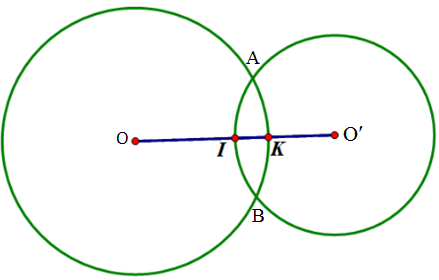
+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

**III/ HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU tại A và B: (**Có hai điểm chung A và B)

+ Điều kiện: R – R’ < OO’ < R + R’

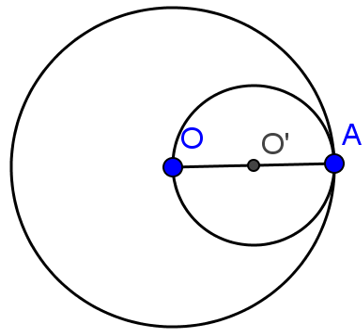
+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là đường trung trực của AB.



**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I. BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm A tùy ý trên (O). Vẽ đường tròn đường kính OA. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Hướng dẫn

Gọi O’ là tâm đường tròn đường kính OA.

Ta có O’ là trung điểm của OA và bán kính đường tròn(O’) là

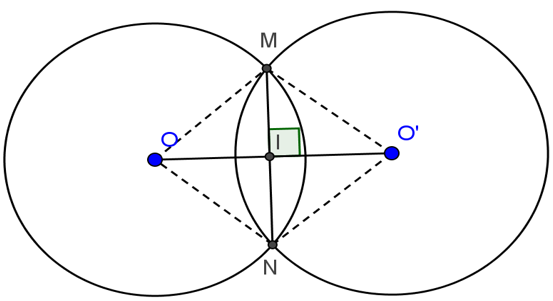
R' = OA/2 = R/2.

Độ dài đoạn nối tâm: d = OO' = OA/2 = R/2.

Ta có: R - R' = R/2 = d nên (O) và (O’) tiếp xúc trong tại A.

**Bài 2:** Cho hai đường tròn (O;R) và (O’; R) cắt nhau tại M và N. Biết OO’=24cm, MN =10cm. Tính R.

Hướng dẫn

 Gọi giao điểm của OO’ và MN là I.

Vì OM = ON = O’M =O’N = R

=> tứ giác OMO’N là hình thoi

=> OO' ⊥ MN tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO’ và MN.

Do đó: IM = MN/2 = 5cm ; IO = OO'/2 = 12cm.

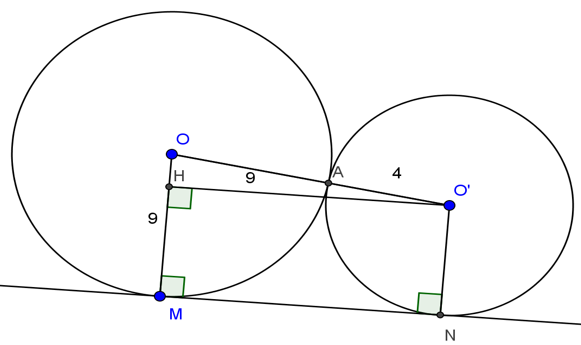
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác MIO ta có:

R = OM =  = 13

Vậy R = 13(cm)

**Bài 3:** Cho hai đường tròn (O;R) và (O’;R’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O), N thuộc (O’). Biết R = 9cm, R’ = 4cm. Tính độ dài đoạn MN.

Hướng dẫn

Ta có: OO’= OA + O’A = 9 + 4 =13(cm)

Kẻ OH ⊥ OM tại H

=> tứ giác O’NMH là hình chữ nhật

=> MH = O’N = 4cm; MN = O’H

=> OH = OM - MH = 9 – 4 = 5(cm)

Áp dụng đình lí py-ta-go vào tam giác OO’H, ta có: MN = O'H =  = 12 (cm)

Vậy MN = 12cm.

**Bài 4:** Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại với . Đường nối tâm cắt  lần lượt tại . Dây  của  vuông góc với  tại trung điểm  của 

a) Chứng minh  là hình thoi

b) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh  thẳng hàng

c) Chứng minh  là tiếp tuyến của 

Hướng dẫn



a) Vì vuông góc với đường thẳng  nên  (theo giả thiết)

=> tứ giác  là hình bình hành, lại có  nên là hình thoi.

b) Vì tam giác  nội tiếp đường tròn  có  là đường kính nên  vuông tại .

Gọi  là giao điểm của  với  thì  (1) (vì so le trong với ).

Lại có  nội tiếp đường tròn  có  là đường kính

=> tam giác  vuông tại , hay  (2).

Từ (1) và (2) suy ra . Vậy  thẳng hàng.

c) Vì tam giác  vuông tại  có  là trung tuyến ứng với cạnh huyền 

=>  (1).

Lại có  (2) do cùng phụ với  và  (3), vì  là bán kính của đường tròn .

Từ (1),(2),(3) suy ra  hay 

=>  vuông góc với bán kính  của đường tròn .

Vậy  là tiếp tuyến của đường tròn .

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1**: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD. AB = AE. AC

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm, AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

**Bài 2**. Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ( với  (O) và D  (O’) ).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5 cm, O’A = 2 cm.

**Bài 3**. Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O’). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO’, Q là điểm đối xứng với N qua OO’. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O’) .

c) MN + PQ = MP + NQ.

**Bài 4.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác BDHF và CDHE cắt nhau.

**Bài 5.** Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm A cố định bên trong đường tròn (O). Gọi M là điểm di động trên đường tròn (O), đường trung trực của dây AM cắt (O) tại P và P’.

a) Chứng tỏ tập hợp các hình chiếu của O lên PP’ là đường tròn (I).

b) Chứng tỏ đường tròn (I) và đường tròn (A, R) đựng nhau.

**Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 5cm, AC = 12cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (B, 6cm) và (C, a cm), (a ϵ R) theo a.

**Bài 7.** Cho tam giác OAO’ vuông tại A có OA = 6cm, O’A = 8cm. Chứng minh đường tròn (O, 5cm) và đường tròn (O’,  cm) cắt nhau tại hai điểm M và N. Tính độ dài MN.

**Bài 8.** Cho đường tròn (O) có đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF. Xác định vị trí tương đối giữa các đường tròn: (I) và (O), (K) và (O), (I) và (K).

**Bài 9.** Cho hai đường tròn (O, R) và (O’, R’) tiếp xúc ngoài nhau cố định. Bán kính OA quay quanh O, bán kính OA’ quay quanh O’ sao cho OA luôn song song với O’A’. Gọi M là trung điểm của AA’.

**Bài 10.** Cho tam giác ABC có AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a. Đường trung trực của AC cắt đường phân giác của góc BAC tại K. Đường tròn tâm K tiếp xúc với đường thẳng AB. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp △ABC.

**Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = a và AC = 2a/3. Xác định bán kính của đường tròn tâm C để đường tròn này tiếp xúc với đường tròn (O’) tại M’.

a) Chứng minh các đường thẳng vuông góc với d tại M và M’ đi qua các điểm N và N’ cố định và thẳng hàng với B.

b) Chứng minh trung điểm I của NN’ là tâm của đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O’).

**CHỦ ĐỀ 7: TỔNG ÔN CHƯƠNG II**

**PHIẾU SỐ 1**

**Bài 1**. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

1/ Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2/ AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.

**Lời giải:**



1/ Theo giả thiết: BE là đường cao => BE ⊥ AC => ∠BEC = 900.

CF là đường cao => CF ⊥ AB => ∠BFC = 900.

Lấy I là trung điểm của BC => IB = IC = IF = IE.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC

1. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: ∠ AEH = ∠ ADC = 900 ; ∠A là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC =>  => AE.AC = AH.AD.

\* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: ∠ BEC = ∠ ADC = 900 ; ∠C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC =>  => AD.BC = BE.AC.

**Bài 2**. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1/ Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh ED = BC.

3/ Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4/ Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

**Lời giải:**

**1**. Chứng minh như bài 1

**2**. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có ∠BEC = 900 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = BC.

3. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => ∠E1 = ∠A1 (1).

Theo trên DE = BC => tam giác DBE cân tại D => ∠E3 = ∠B1 (2)

Mà ∠B1 = ∠A1 ( vì cùng phụ với góc ACB) => ∠E1 = ∠E3 => ∠E1 + ∠E2 = ∠E2 + ∠E3

Mà ∠E1 + ∠E2 = ∠BEA = 900 => ∠E2 + ∠E3 = 900 = ∠OED => DE ⊥ OE tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

**4**. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm.

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có

ED2 = OD2 – OE2 ⬄ ED2 = 52 – 32 ⬄ ED = 4cm

**Bài 3:** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1/ Chứng minh AC + BD = CD.

2/ Chứng minh ∠COD = 900.

3/ Chứng minh AC. BD = .

4/ Chứng minh OC // BM

5/ Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

6/ Chứng minh MN ⊥ AB.

7/ Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

1/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 900.

3/ Theo trên ∠COD = 900 nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD ( OM là tiếp tuyến ).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R2 => AC. BD = .

4/ Theo trên ∠COD = 900 nên OC ⊥ OD . (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R

=> OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD . (2).

Từ (1) Và (2) => OC // BM ( Vì cùng vuông góc với OD).

5/ Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang.

Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB

=> IO là đường trung bình của hình thang ACDB

 IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O

=> AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

**6**/ Theo trên AC // BD => , mà CA = CM; DB = DM nên suy ra 

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

**7**/ Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD

=> Chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi

=> Chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB

=> M phải là trung điểm của cung AB.

**Bài 4**. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc

A , O là trung điểm của IK.

1/ Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3/ Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

**Lời giải**

**1.** Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI ⊥ BK hay ∠IBK = 900 .

Tương tự ta cũng có ∠ICK = 900

Lấy O’ là trung điểm của IK => O’K = O’I = OC = OB

=> B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

**2.** Ta có ∠C1 = ∠C2 (1) ( vì CI là phân giác của góc ACH.

∠C2 + ∠I1 = 900 (2) ( vì ∠IHC = 900 ).

∠I1 = ∠ ICO (3) ( vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => ∠C1 + ∠ICO = 900 hay AC ⊥ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**3.** Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

AH2 = AC2 – HC2 => AH =  = 16 ( cm)

CH2 = AH.OH => OH =  = 9 (cm)

OC =  = 15 (cm)

**Bài 5.** Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì ( M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1/ Chứng minh tứ A, M, B, O cùng thuộc một đường tròn.

2/ Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

3/ Chứng minh OI.OM = R2; OI. IM = IA2.

4/ Chứng minh OAHB là hình thoi.

5/ Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

6/ Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

**Lời giải**

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính

Và dây cung) => ∠OKM = 900.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 900; ∠OBM = 900.

=> K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 900 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

**3**. Ta có MA = MB ( t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 900 nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA2 hay OI.OM = R2; và OI. IM = IA2.

**4**. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

**5**. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB

=> O, H, M thẳng hàng( Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

**6**. Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R.

Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R.

Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa (A) bán kính AH = R

**Bài 6**: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1/ Chứng minh tam giác BEC cân.

2/ Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.

3/ Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

4/ Chứng minh BE = BH + DE.

**Lời giải**

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC

=> BEC là tam giác cân. => ∠B1 = ∠B2

**2**. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, ∠B1 = ∠B2

=> Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

**3**. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

**4**. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

**Bài 7:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao

cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1/ Chứng minh rằng A, P, M, O cùng thuộc đường tròn.

2/ Chứng minh BM // OP.

3/ Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

 4/ Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**Lời giải**

**1.** (HS tự làm).

**2.** Ta có góc ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠AOM là góc ở tâm chắn cung AM

=> ∠ABM =  (1)

OP là tia phân giác ∠AOM ( t/c hai tiếp tuyến cắt nhau )

=> ∠AOP =  (2)

Từ (1) và (2) => ∠ABM = ∠AOP (3)

Mà ∠ABM và ∠AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

**3**. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : ∠PAO = 900 (vì PA là tiếp tuyến ); ∠NOB = 900 (gt NO⊥AB).

=> ∠PAO = ∠NOB = 900; OA = OB = R; ∠AOP = ∠OBN (theo (3))

=> ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành ( vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

**4**. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

Ta cũng có PM ⊥ OJ ( PM là tiếp tuyến ), mà ON và PM cắt nhau tại I

=> I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có ∠PAO = ∠AON = ∠ONP = 900

=> K là trung điểm của PO ( t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => ∠APO = ∠NOP ( so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

**Bài 8**: Cho nửa đường tròn tâm O đường kớnh AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn ( M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F, tia BE cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng E, F, M, K cùng thuộc một đường tròn.

 2) Chứng minh rằng: AI2 = IM **.** IB.

**Lời giải**

**1**. Dùng đường tròn O và xét ∆AEB , ∆AMB đều là các tam giác vuông (suy ra từ đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy)

=> ∆FEK , ∆FMK cũng là các tam giác vuông.

Lấy O’ là trung điểm của FK => OF = OK = OM = OE = FK/2

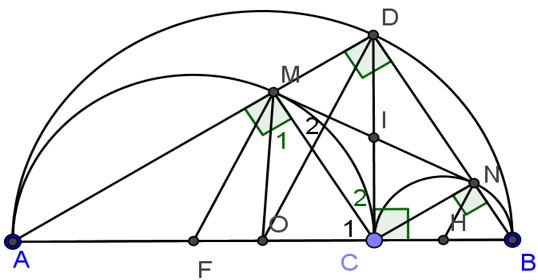
=> E, F, M, K cùng thuộc đường tròn (O’) đường kính FK

2. Ta có ∠IAB = 900 ( vì AI là tiếp tuyến ) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB ( theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI2 = IM **.** IB.

**Bài 9:** Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA,DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N.

Hướng dẫn

a, Ta có: Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC

=> ∠AMC = 90o

Tam giác CNB nội tiếp đường tròn đường kính CB

=> ∠CNB = 90o

Tam giác ADB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠ADB = 900

Suy ra tứ giác DMCN là hình chữ nhật.

b, Xét tam giác vuông DCA có :

DC2 = DM.MA (1) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Xét tam giác vuông DCB có: DC2 = DN.DB (2) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ (1) và (2) ta suy ra DM.MA = DN.NB

c, Vì DMCN là hình chữ nhật nên IM = IC suy ra tam giác IMC cân tại I => ∠M2 = ∠C2

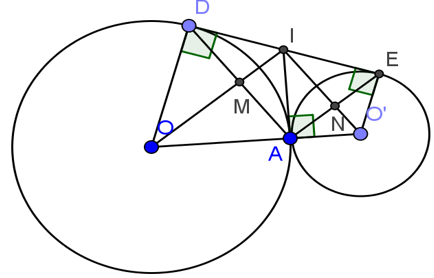
Vì tam giác MFC cân tại F nên ∠M1 = ∠C1 Mà ∠C1 + ∠C2 = 90o

=> ∠M1 + ∠M2 = 90o Hay ∠FMN = 90o => FM ⊥ MN

Chứng minh tương tự ∠MNC = 90o

=> HN ⊥ MN d, Ta có: DC = MN (vì DMCN là hình chữ nhật) mà DC ≤ DO

=> MN ≤ DO MN = DO khi C ≡ O Suy ra C là trung điểm của AB.

**Bài 10:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung DE, D thuộc đường tròn tâm O, E thuộc đường tròn tâm O’. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt DE ở I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O’I và AE.

a, Tứ giác AMIN là hình gì? Vì sao?

b, Chứng minh IM.IO=IN.IO’

c, Chứng minh rằng O O’ là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.

d, Tính độ dài DE biết rằng OA=5cm, O’A=3,2 cm.

Hướng dẫn

a) Ta có: ID và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I.

Suy ra ID = IA (1) Mà OD = OA

Suy ra IO là trung trực của AD => IO ⊥ AD

=> ∠IMA = 90o + IE và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I

Suy ra IA = IE (2) Mà O’A = O’E

Suy ra IO’ là trung trực của AE => IO ⊥ AE

=> ∠INA = 90o

Từ (1) và (2) suy ra IA = ID = IE Suy ra tam giác DAE vuông tại A

=> ∠DAE = 90o

Tứ giác MINA có 3 góc ∠IMA = 90o ; ∠INA = 90o; ∠DAE = 90o nên tứ giác MINA là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác vuông IAO có AN ⊥ IO' : IA2 = IM.IO (3) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Xét tam giác vuông IAO’ có : IA2 = IN.IO' (4) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Từ (3) và (4) ta suy ra IM.IO = IN.IO'

c) Theo trên ta có tam giác DAE vuông tại A

=> 3 điểm D, E, A nội tiếp đường tròn đường kính DE (5)

Do IA là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O’) => IA ⊥ OO' (6)

Từ (5) và (6) ta suy ra OO’ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

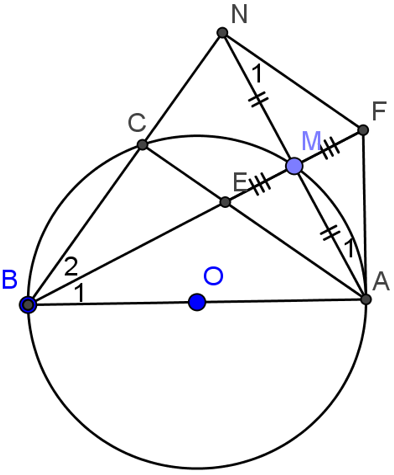
d) Xét tam giác vuông IOO’ có IA2 = OA . OA' => IA2 = 5.3,2 =16(cm)

Vậy IA = 4cm.

**Bài 11:** Cho đường tròn (O), đường kính AB, đểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M.BN cắt đường tròn ở C.Gọi E là giao điểm của AC và BM.

a, Chứng minh rằng NE ⊥ AB .

b, Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh rằng FA là tiếp tuyến của đường tròn(O).

c, Chứng minh rằng FN là tiếp tuyến của đường tròn(B; BA).

Hướng dẫn

a) Tam giác AMB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠AMB = 90o => AM ⊥ MB

Tam giác ACB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> ∠ACB = 90o => AC ⊥ CB

Suy ra E là trực tâm của tam giác NAB, do đó NE ⊥ AB .

b) Tứ giác AFNE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành( tứ giác này còn là hình thoi).

Do đó FA//NE.

Do NE ⊥ AB nên FA ⊥ AB .

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân.

Suy ra BN = BA.

Do đó BN là bán kính của đường tròn (B;BA).

Tam giác ABN cân tại B nên ∠BNA = ∠BAN (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra ∠N1 = ∠A1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠BNA + ∠N1 = ∠BAN + ∠A1 tức là ∠FNB = ∠FAB

Ta lại có: ∠FAB = 90o (câu b), nên ∠FNB = 90o .

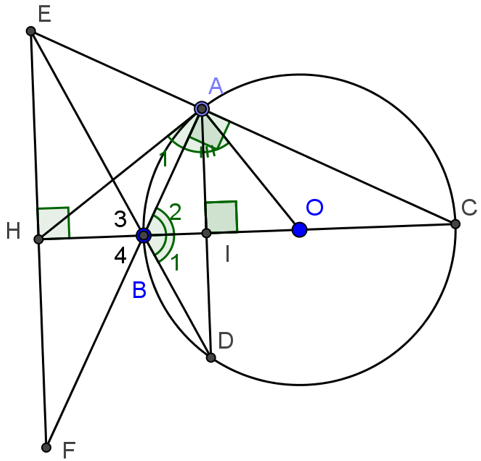
Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

**Bài 12:** Cho tam giác vuông tại A( AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác EBF là tam giác cân.

b) Tam giác HAF là tam giác cân.

c) HA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Hướng dẫn

a) Ta có: OB ⊥ AD tại I nên AI = ID.

Suy ra tam giác BAD cân, ∠B1 = ∠B2 , do đó ∠B3 = ∠B4 .

Tam giác EBF có đường cao cũng là đường phân giác nên là tam giác cân.

b) Tam giác BEF cân nên EH = HF.

Tam giác AEF vuông tại A có AH là đường trung tuyến nên AH = HE = HF.

Do đó tam giác HAF cân tại H.

c) Tam giác HAF cân tại H nên ∠A1 = ∠F (1)

Tam giác OAB cân tại O nên ∠OAB = ∠B1 = ∠B4 (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠OAH = ∠A1 + ∠OAB = ∠F + ∠B4 = 90o

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (

**MỘT SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG II**

**PHIẾU SỐ 2**

**Bài 1:** Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB ( A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 400.

a/ Tính góc AOB.

b/ Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N.Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

**Bài 2:** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẽ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a/ Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b/ Chứng minh: MC.MD = OM2.

c/ Cho biết OC = BA = 2R, tính AC và BD theo R.

**Bài 3:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O’). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a/ Đường thẳng CM cắt (O’) tại P. Chúng minh: OM//BP.

b/ Từ C kẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh: Tam giác OCD là tam giác cân.

**Bài 4:** Cho hai đường tròn (O,R) và (O/,R/) cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O/,R/). Biết R=12cm, R/=5cm.

a/ Chứng minh: O/A là tiếp tuyến của đường tròn (O,R).

b/ Tính độ dài các đoạn thẳng OO/, AB.

**Bài 5:** Cho đường tròn tâm O bán kính R=6cm và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

**Bài 6:** Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O,r). Dây AB của (O,R) tiếp xúc với (O,r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O,r) cắt (O,R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a/ Chứng minh: EA=EC.

b/ Chứng minh: EO vuông góc với BD.

**Bài 7:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

Khi AH=2cm, MH=4cm. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng: AB, MA, MB.

**Bài 8**: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác .

a) Tính số đo góc ABD

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Tại sao?

c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh 2OM = AH.

**Bài 9**: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở điểm D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không ? Tại sao?

b) Chứng minh: BC2 = 4AH . DH

c) Cho BC = 24cm, AB = 20cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

**Bài 10**. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

a) Tứ giác ACOD là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D,O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh đẳng thức CD2 = 4 AH. HB .

**Bài 11.** Hình bên cho biết AB = CD. Chứng minh rằng:

a) MH = MK.

b) MB= MD .

c) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang cân.

**Bài 12**. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo  (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

**Bài 13.**Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

**Bài 14.**Cho đường tròn tâm (O;R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho . Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM):

b) Chứng minh MN2 = 4 AH .HB .

c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

c) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F.Chứng minh ba điểm N; E; F thẳng hàng.

**Bài 15.** Cho đường tròn (O) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

**Bài 16**. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O;R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA  BC và tính tích OH. OA theo R

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD // OA.

c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

**Bài 17.**  Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE  AC và CF  AB ( E ), BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

**Bài 18.** Cho đường tròn (O ; 3cm) và điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc DOE.

**Bài 19.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB( Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh MN = AM + BN.

c) Tính tích AM. BN theo R.

**Bài 20**: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD. AB = AE. AC

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm,AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

**Bài 21**. Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ( với  (O) và D  (O’) ).

a) Tính số đo góc CAD.

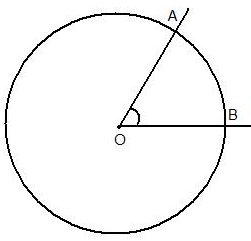
b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5 cm, O’A = 2 cm.

**Bài 22**. Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O’). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO’, Q là điểm đối xứng với N qua OO’. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O’) và MN + PQ = MP + NQ.

**CHỦ ĐỀ 8: GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG.**

 **LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY.**

**A/ LÝ THUYẾT.**

*1/ Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm của đường tròn. Góc này cắt đường tròn tại A và B khi đó cung nhỏ AB là cung bị chắn của góc ở tâm AOB.*

*2/ Số đo cung:*

*+ Số đocủa cung nhỏ bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.*

*+ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360o và số đo của cung nhỏ.*

*+ Số đo của nửa đường tròn bằng 180o*

*+ Chú ý:*

*- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180o*

*- Cung lớn có số đo lớn hơn 180o*

*3/ So sánh cung:*

*+ Cung nào lớn hơn thì có số đo cũng lớn hơn và ngược lại.*

*+ Cung nào có góc ở tâm lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.*

*4/ Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì: Sđ = Sđ + Sđ *

*5/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:*

*- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.*

*- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.*

*6/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:*

*- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.*

*- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.*

**B/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA và OB nếu:

a) ∠AMB = 70o

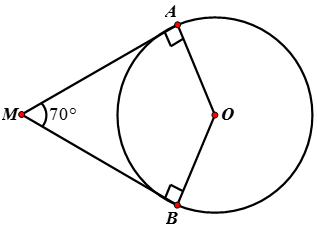
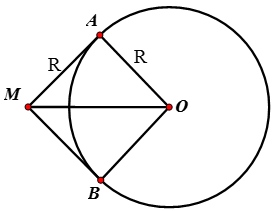
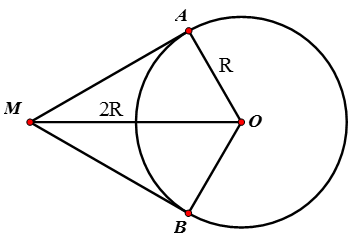
b) MA = R

c) MO = 2R

Hướng dẫn

Vì MA và MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nên: MA ⊥ OA, MB ⊥ O B

=> ∠MAO = ∠MBO = 90o

a) Xét tứ giác MAOB có:

∠AMB + ∠AOB + ∠MAO + ∠MBO = 360o

⇔ ∠AOB = 360o - (∠AMB + ∠MAO + ∠MBO) = 360o - (70o+ 90o + 90o) = 110o

Vậy số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB bằng 110o .

b) Nếu MA = R

Xét ΔMAO có: MA = AO = R và ∠MAO = 90o => Δ MAO vuông cân tại A =>  = 45o

Vậy ∠AOB = 2.∠MOA = 90o

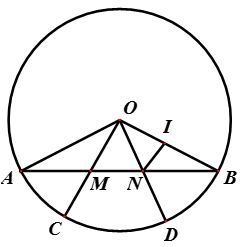
c) Nếu MO = 2R

Xét ΔMAO vuông tại A có: MO = 2.AO => ∠AMO = 30o => ∠AOM = 60o

Vậy: ∠AOB = 2.∠AOM = 120o

**Bài 2:** Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua O. Trên dây AB lấy các điểm M, N sao cho AM = MN = NB. Tia OM, ON cắt (O) lần lượt tại C và D. So sánh cung AC, CD, DB.

Hướng dẫn

Xét ΔAOM và ΔBON có:

OA = OB = R

∠OAM = ∠OBN (do ΔOAB cân tại O)

AM = BN (gt)

=> ΔAOM = ΔBON (c – g - c)

=> ∠AOM = ∠BON (hai góc tương ứng)

=> 

Gọi I là trung điểm của OB. Suy ra NI là đường trung bình của ΔOBM

=> NI // OM => ∠MON = ∠ONI (so le trong) (1)

Mặt khác ta có: OB = OC = R, mà M ∈ OC => OM < OB hay NI < OI.

Xét ΔONI có NI < OI nên: ∠NOI < ∠ONI (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠NOI < ∠MON => 

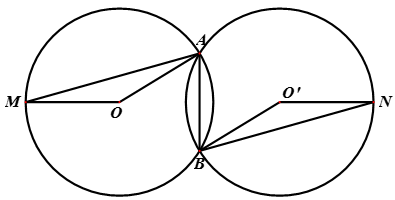
**Bài 3:** Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O’) cắt nhau tại A và B. Kẻ dây AM của đường tròn (O) và dây BN của đường tròn (O’) sao cho AM // BN. Chứng minh 

Hướng dẫn

Vì AM // BN (gt)

=> ∠MAB = ∠ABN (so le trong) (1)

Mặt khác: OA = OB = O'A = O'B

 => Tứ giác OAO’B là hình thoi

=> ∠OAB = ∠ABO' (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ∠MAO = ∠NBO'

Ta có: ΔMOA cân tại O và ΔNO'B cân tại O' có góc ở đáy bằng nhau => ∠MOA = ∠NO'B

Do đó: ΔMOA = ΔNO'B (c.g.c) => AM = BN

Mặt khác hai đường tròn (O) và (O’) bằng nhau nên

=> 

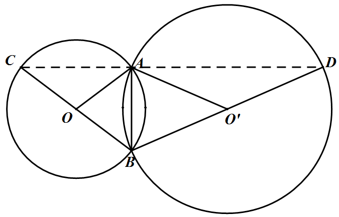
**Bài 4:** Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) cắt nhau tại hai điểm A và B (R < R'). Kẻ đường kính BOC và BO’D.

a) Chứng minh rằng: Ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) So sánh số đo hai cung nhỏ AC và AD.

Hướng dẫn

a) Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên ΔABC vuông tại A hay ∠BAC = 90o .

 Tương tự ta có: ∠BAD = 90o

=> ∠CAD = ∠BAD + ∠BAC = 180o

=> 3 điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Xét đường tròn (O) có: 

Xét đường tròn (O’) có: 

=> 

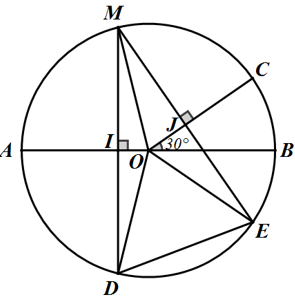
**Bài 5:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho SđBC = 30o, điểm M thuộc cung AC nhỏ. Gọi D và E là các điểm đối xứng với M qua AB và OC. Chứng minh rằng: ΔDOE đều.

Hướng dẫn

Vì sđ = 30o => ∠BOC = 30o

Gọi I là giao điểm của MD và AB, J là giao điểm của ME và OC.

Theo giả thiết: M và D đối xứng với nhau qua AB, mà M thuộc đường tròn (O) nên D cũng thuộc đường tròn (O).

 Tương tự E thuộc đường tròn (O).

Tứ giác MIOJ có ∠I = ∠J = 90o => ∠IMJ + ∠IOJ = 180o

=> ∠IMJ = 180o - ∠IOJ = ∠BOC = 30o

Ta có ΔMOD và ΔMOE cân tại O nên:

∠MOD = 180o - 2∠DMO

∠MOE = 180o - 2∠EMO

=> ∠MOD + ∠MOE = 360o - 2(∠DMO + ∠EMO)

⇔ 360o - ∠DOE = 360o - ∠IMJ ⇔ ∠DOE = 2∠IMJ = 60o

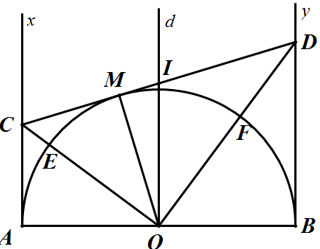
Vậy ΔDOE đều.

**Bài 6:** Cho điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M với (O) cắt Ax tại C và cắt By tại D; các đường thẳng CO và OD cắt (O) lần lượt tại E và F.

a) Tính sđ .

b) Tìm tập hợp tâm I của đường tròn ngoại tiếp .

Hướng dẫn

a) Vì CA và BM là hai tiếp tuyến với (O) nên OC là tia phân giác của ∠AOM .

Tương tự ta có OD là tia phân giác của ∠BOM Mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => OC ⊥ OD

Vậy ta có ∠COD = 90o hay sđ  = 90o .

b) Vì ΔCOD vuông tại O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔCOD là trung điểm của CD.

Dễ thấy tứ giác ABCD là hình thang có OI là đường trung bình nên OI//AC => OI ⊥ AB.

Vậy I chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với AB tại O.

**Bài 7:** Cho AB là dây cung của đường tròn (O), I là trung điểm của AB. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M tùy ý. Gọi giao điểm OI và MI với (O) lần lượt C và N. So sánh  và .

Hướng dẫn

Kẻ OH ⊥ MN Ta có: ΔOHI vuông tại H nên OH < OI.

Mà OH, OI lần lượt là các khoảng cách từ O đến hai dây MN và AB => AB < MN.

Do đó sđ > sđ.

**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**BT1:** Cho (O; 5cm) và điểm M sao cho OM=10cm. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

**BT2:** Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD; DE và EC.

**BT3:** Cho hai đường tròn (O; R) và (O; r) với R > r. Điểm M ngoài (O; R). Qua M vẽ hai tiếp tuyến với (O; r), một cắt (O; R) tại A và B (A nằm giữa M và B); một cắt (O; R) tại C và D (C nằm giữa D và M). C/m: hai cung AB và CD bằng nhau.

**BT4:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A, B. Dây AC của đường tròn (O) vuông góc với AO’; dây AD của đường tròn (O’) vuông góc với AO. So sánh các góc .

**BT5:** Trên một đường tròn (O) có cung  bằng 140o . Gọi A’. B’ lần lượt là đối xứng của A, B qua O; lấy cung  nhận B’ làm điểm chính giữa; lấy cung  nhận A’ làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ .

**BT6:** Cho hai đường tròn bằng nhau (O) , (O’) cắt nhau tại A, B. Kẻ các đường kính AOC và AO’D. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AC với (O’).

a) So sánh các cung nhỏ , .

b) Chứng minh rằng B là điểm chính giữa cung .

**BT7:**

a) Cho đường tròn (O, R) với hai điểm A, B. Tìm quỹ tích trung điểm của các dây trên đường tròn có độ dài bằng dây AB.

b) Cho đường tròn (O, R) với hai tiếp tuyến AB, AC. Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O) cắt các đoạn thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng P, Q. Gọi P’, Q’ theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng OP, OQ với đường tròn (O). Chứng minh rằng cung nhỏ  có số đo không đổi. Tìm quỹ tích trung điểm I của P’Q’.

**BT8:** Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi M là điểm chính giữa cung . Vẽ dây MC cắt dây AB tại D. Vẽ đường vuông góc với AB tại D, cắt OC tại K.  là tam giác gì ?

**BT9:** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại bốn điểm trên cắt nhau tạo thành tứ giác ABCD. Tính số đo tổng các góc  ?

**BT10:** Cho đường tròn (O), dây AB. Trên dây AB lấy D rồi nối D với C trên đường tròn (C khác A, B; A, O, C không thẳng hàng). Các đường trung trực của AD và DC cắt nhau ở M. CMR: đường thẳng MO đi qua điểm chính giữa cung .

**BT11:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, lấy điểm S sao cho SA và SB lần lượt cắt nửa đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh:

a) Tứ giác SMHN nội tiếp được trong một đường tròn.

b) SH vuông góc với AB.

**BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**BT1:** Cho hai đường tròn đồng tâm (O;R) và (O;2R). P là một điểm ngoài (O;2R). Vẽ đường tròn (P;PO) cắt đường tròn (O;2R) tại C và D, cắt đường tròn (O;R) ở E và F. OC và OD cắt (O;R) ở A và B. CMR:

a) CD **//** EF.

b) PA và PB là hai tiếp tuyến của (O;R).

**BT2:** Cho hình thoi ABCD có cạnh AB =5 cm và đường chéo AC=8 cm. Đường tròn tâm A bán kính R=5 cm tiếp xúc với đường tròn tâm C tại M thuộc đoạn AC. Đường tròn này cắt CB tại E và cắt CD tại F. Tính tỉ số độ dài của cung  và cung 

**BT3:** Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB ( A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 400.

a) Tính góc AOB.

b) Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N.Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

**BT4:** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẽ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: MC.MD=OM2.

c) Cho biết OC=BA=2R, tính AC và BD theo R.

**BT5:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Biết  = 650 ; = 1020. Tính số đo các góc A và D.

**BT6:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và M. Kẻ hai tiếp tuyến MN và MP với đường tròn (N, P là hai tiếp điểm ).

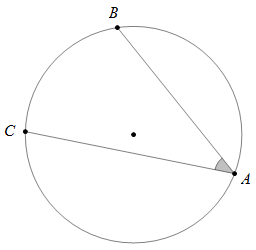
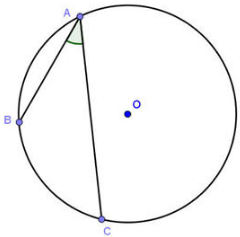
a) Chứng minh tứ giác MNOP nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của NP và AB. Chứng minh NP  AB.

c) Chứng minh OH . MH = AH . BH

**CHỦ ĐỀ 9: góc nội tiếp.**

**A.** **LÝ THUYẾT.**

+ Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó ( là góc nội tiếp chắn cung nhỏ )

+ Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn ( gọi là cung bị chắn).

2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn:

\* Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

Nếu 

\* Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

Trên hình vẽ: .

Trên hình vẽ: 

\* Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

\* Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

*\** ***Để chứng minh tích độ dài đoạn thẳng bằng nhau*** *cần chứng minh hai tam giác giác đồng dạng liên quan đến tích đó.*

*\** ***Để chứng minh hai tam giác đồng dạng cần chứng minh***

*+ Hai góc tương ứng của hai tam giác đó bằng nhau*

*+ Hai cặp cạnh của hai tam giác tương ứng tỉ lệ và góc sen giữa bằng nhau.*

***\* Để chứng minh hai góc bằng nhau ta cần chú ý:***

*+ Xem góc cần chứng minh có phải là hai góc nội tiếp cùng chắn một cung, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau (hai dây cung bằng nhau) trong một đường tròn.*

*+ Xem hai góc đó, mỗi góc bằng với góc nội tiếp nào và các góc nội tiếp đó có bằng nhau không*

*+ Xem hai góc đó có liên quan đến hai tam giác bằng nhau, góc có cạnh tương ứng vuông góc, góc sole trong, góc đồng vị không, góc của tam giác vuông…*

**I/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) cắt nhau tại A và B . Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB . Tia CB cắt (O’) tại E, tia BD cắt (O) tại F. Chứng minh rằng:

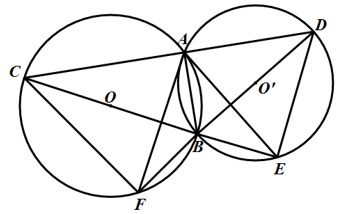
a) ∠CAF = ∠DAE

b) AB là tia phân giác của ∠EAF

c) CA.CD = CB.CE

d) CD2 = CB.CE + BD.CF

Hướng dẫn



Vì CD ⊥ AB => ∠CAB = 90o  Mà ∠CAB = 1/2 sđ  => sđ  = 180o

Vậy ba điểm B, O, C thằng hàng.

Chứng minh tương tự ta có B, O’, D thẳng hàng.

a) Chứng minh ∠CAF = ∠DAE

Trong (O) ta có: ∠CAF = ∠CBF (góc nội tiếp cùng chắn cung CF )

Trong (O’) ta có: ∠DAE = ∠DBE (góc nội tiếp cùng chắn cung DE )

Mà ∠CBF = ∠DBE (đối đỉnh)

=> ∠CAF = ∠DAE .

b) AB là tia phân giác của ∠EAF

Nối CF và DE ta có: ∠CFB = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

∠BED = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O’))

Xét ΔCFB và ΔDEB có:

∠CFB = ∠BED = 90o

∠CBF = ∠DBE (đối đỉnh)

=> ∠FCB = ∠EDB

Mặt khác: ∠FAB = ∠FCB (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung FB )

∠EAB = ∠EDB (góc nội tiếp (O’) cùng chắn cung EB )

=> ∠FAB = ∠EAB hay AB là phân giác của góc ∠EAF .

c) Chứng minh CA.CD = CB.CE

Xét ΔCAE và ΔCBD có:

∠C chung

∠CEA = ∠BDA (góc nội tiếp (O’) cùng chắn cung AB)

=> ΔCAE ∼ ΔCBD (g.g) => CA/CB = CE/CD hay CA.CD = CB.CE (1)

d) Chứng minh CD2 = CB.CE + BD.CF

Chứng minh tương tự câu c) ta có: DA.DC = DB.DF (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

CA.CD + DA.DC = CB.CE + DB.DF

⇔ (CA + DA)CD = CB.CE + DB.DF

⇔ CD2 = CB.CE + DB.DF

**Bài 2:** Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng:

a) MA.MB = MC.MD.

b) Tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Hướng dẫn

a) Chứng minh MA.MB = MC.MD.

Xét ΔAMC và ΔDMB có:

∠ACD = ∠ABD (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

∠AMC = ∠BMD = 90o (gt)

=> ΔAMC ∼ ΔDMB (g.g)

=> MA/MD = MC/MB => MA.MB = MC.MD

b) Chứng minh tứ giác ABEC là hình thang cân.

Vì ∠DCE = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> CD ⊥ CE CD ⊥ AB (gt) => AB // CE.

=> Tứ giác ABEC là hình thang (1).

Mặt khác: CE và AB là hai dây song song của đường tròn (O) chắn hai cung AC và BE

=>  (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Ta có  (cmt) => EA = BC .

Mặt khác: ∠DAE = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó: MA2 + MB2 + MC2 + MD2 = (MA2+ MD2) + (MB2 + MC2)

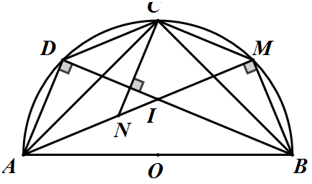
= AD2 + BC2 = DE2 = 4R2 không đổi

**Bài 4:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa của cung AB. Lấy điểm M thuộc cung BC và điểm N thuộc tia AM sao cho AN = BM. Kẻ dây CD song song với AM.

a) Chứng minh ΔACN = ΔBCM .

b) Chứng minh ΔCMN vuông cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔACN = ΔBCM

Xét ΔACN và ΔBCM có:

AC = BC (vì C là điểm chính giữa cung AB)

∠CAN = ∠CBN (góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

AN = BM (gt)

=> ΔACN = ΔBCM (c.g.c)

b) Chứng minh ΔCMN vuông cân

Vì ΔACN = ΔBCM (chứng minh a) => CN = CM => ΔCMN cân tại C (1)

Lại có ∠CMA = 1/2 sđ = 1/2. 90o = 45o (2)

Từ (1) và (2) => ΔCMN vuông cân tại C.

Vì CD // AM nên tứ giác ADCM là hình thang cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

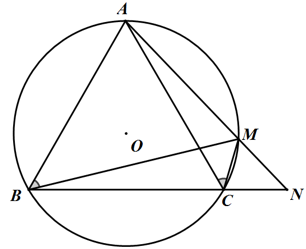
Ta có: ∠DAM = ∠CMN = ∠CNM = 45o

=> AD // CN. Vậy tứ giác ADCN là hình bình hành.

**Bài 5:** Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AC. Tia AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng:

a) AB2 = AM.AN

b) ∠ACM = ∠ANC

Hướng dẫn

a) Chứng minh AB2 = AM.AN

Vì ΔABC cân tại A =>∠ABC = ∠ACB

Lại có ∠ACB = ∠AMB (góc nội tiếp cùng chắn cung AB )

=> ∠ABN = ∠AMB

Do đó: ΔABM ∼ ΔANB (g.g) => AB/AN = AM/MB

=> AB2 = AN. AM

b) Chứng minh ∠ACM = ∠ANC

Vì ΔABM ∼ ΔANB => ∠ABM = ∠ANB

Mà ∠ABM = ∠ACM (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

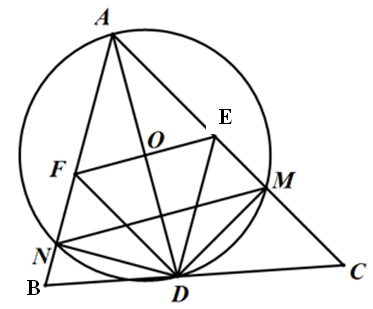
Do đó: ∠ACM = ∠ANC

**Bài 6:** Cho ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC cắt AB ở F.

a) Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?

b) Đường tròn đường kính AD cắt AB và AC lần lượt tại các điểm M và N. Chứng minh: MN // EF.

Hướng dẫn

a) Chứng minh được Tứ giác AEDF là hình thoi.

b) Chứng minh: MN // EF.

ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A

=> ∠BAD = ∠CAD

=>  => ∠DAC = ∠MND (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Lại có: ∠AND = 90o (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠DAN + ∠ADN = 90o => ∠MND + ∠ADN = 90o

=> MN // AD

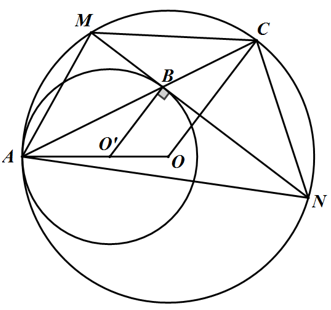
Vì tứ giác AEDF là hình thoi nên EF ⊥ AD => MN // EF

**Bài 7:** Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) tiếp xúc trong với nhau tại A, (R > R'). Qua điểm B bất kỳ trên (O’) vẽ tiếp tuyến với (O’) cắt (O) tại hai điểm M và N, AB cắt (O) tại C. Chứng minh rằng:

a) MN ⊥ OC

b) AC là tia phân giác của ∠MAN

Hướng dẫn

a) Chứng minh MN ⊥ OC

Vì Δ O'AB cân tại O’ nên ∠O'AB = ∠O'BA

=> Δ OAC cân tại O nên ∠OAC = ∠OCA

=> ∠O'BA = ∠OCA mà hai góc này ở vị trí đồng vị

=> O’B // OC.

Mặt khác MN là tiếp tuyến của (O’) tại B => O'B ⊥ MN.

Do đó OC ⊥ MN

b) Chứng minh AC là tia phân giác của ∠MAN

Trong đường tròn (O): => OC là đường trung trực của MN => CM = CN

=> => ∠MAC = ∠NAC Hay AC là tia phân giác của ∠MAN .

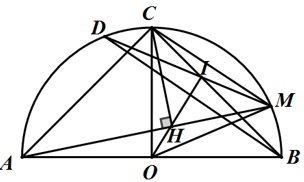
**Bài 8:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa cung AB. M là điểm bất kỳ trên cung BC, kẻ CH ⊥ AM.

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của ∠COM

b) Gọi I là giao điểm của OH với BC và D là giao điểm của MI với nửa đường tròn (O). Chứng minh MC // BD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của ∠COM

 Vì C là điểm chính giữa của cung AB

=> ∠CMA = 

=> ΔHCM vuông cân tại H => CH = HM

Dễ thấy ΔCOH = ΔMOH (c.c.c) => ∠COH = ∠MOH

Vậy OH là tia phân giác của ∠COM

b) Chứng minh MC // BD.

Dễ thấy ΔCOI = ΔMOI (c.g.c) nên CI = MI => ΔCMI cân tại M.

Do đó ∠CMI = ∠MCI.

Lại có ∠CMD = ∠CBD (góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Suy ra ∠MCB = ∠CBD, mà hai góc này ở vị trí so le trong

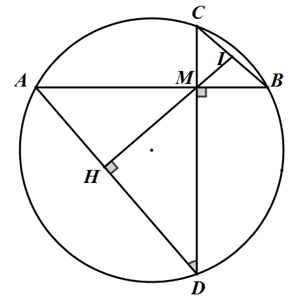
=> MC // BD.

**Bài 9:** Qua điểm M nằm trong đường tròn (O) kẻ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

a) Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC.

b) Đường trung tuyến MI của ΔBMC vuông góc với AD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC

Ta có ∠ADC = ∠ABC (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (1)

Lại có ∠AMH = ∠ADM (cùng phụ với góc ∠MAD)

Mà ∠AMH = ∠IMB (đối đỉnh) => ∠ADM = ∠IMB (2)

Do đó IM = IB.

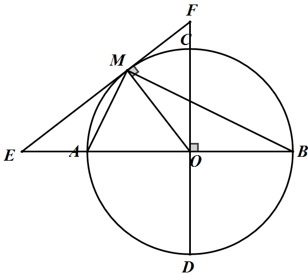
Chứng minh tương tự ta có: IM = IC Suy ra IB = IC = IM

=> I là trung điểm của BC.

b) Học sinh tự chứng minh.

**Bài 10:** Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (O; R). Qua điểm M thuộc cung nhỏ AC (M ≠ A, M ≠ E)kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt AB, CD lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh: ∠MFO = 2.∠MBO

b) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ AC sao cho ∠FEO = 30o. Khi đó tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: ∠MFO = 2.∠MBO

Ta có: ∠MOA = 2∠MBO (cùng chắn cung MA)

Vì EF là tiếp tuyến với (O) tại M nên OM ⊥ EF

Ta có ∠MOA = ∠EFO (cùng phụ với góc ∠FEO )

Suy ra ∠EFO = 2∠MBO

b) Tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Ta có: ∠FEO = 30o ⇔ ∠MOA = 60o ⇔ ΔAOM đều nên AM = OA = R.

Vậy nếu M ∈ (O) và AM = R thì ∠FEO = 30o

Khi đó ΔOME vuông tại M nên ME = MO. tan∠MOA = R ; OE = 2MO = 2R

Vì ΔEOF vuông tại O nên cos ∠FEO = EO/EF => EF = EO/cos ∠FEO = 2R / cos30o = 4R/3

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1** : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M . Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N . Chứng minh rằng :

a) Tam giác MBC cân .

b) Ba điểm M , O , N thẳng hàng .

**Bài 2** : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . M là điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn ( M khác A và B ) . Kẻ MH ⊥ AB ( H ∈AB ) . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O1 đường kính AH và tâm O2 đường kính BH . MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O1) và (O2) lần lượt tại P và Q .

a) Chứng minh MH = PQ .

b) Chứng minh hai tam giác MPQ và MBA đồng dạng .

c) Chứng minh PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O1) và (O2)

**Bài 3** :Cho ΔABC đều , đường cao AH . M là điểm bất kỳ trên đáy BC . Kẻ

MP ⊥ AB và MQ ⊥ AC . Gọi O là trung của AM .

a) Chứng minh năm điểm A , P , M , H , Q cùng nằm trên một đường tròn .

b) Tứ giác OPHQ là hình gì ? chứng minh .

c) Xác định vị trí của M trên BC để PQ có độ dài nhỏ nhất .

**Bài 4** : Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M trên đường tròn (M khác A và B ) sao cho MA < MB . Lấy MA làm cạnh vẽ hình vuông MADE ( E thuộc đoạn thẳng MB ) . Gọi F là giao điểm của DE và AB .

a) Chứng minh ΔADF và ΔBMA đồng dạng .

b) Lấy C là điểm chính giữa cung AB ( không chứa M ) . Chứng minh CA = CE = CB

c) Trên đoạn thẳng MC lấy điểm I sao cho CI = CA . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB .

**Bài 5** : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn . CA cắt nửa đường tròn ở M , CB cắt nửa đường tròn ở N . Gọi H là giao điểm của AN và BM .

a) Chứng minh CH ⊥ AB .

b) Gọi I là trung điểm của CH . Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)

c) Giả sử CH =2R . Tính số đo cung  .

**Bài 6** : Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC lấy một điểm P tuỳ ý . Gọi Q là giao điểm của AP và BC

a) Chứng minh BC2= AP . AQ .

b) Trên AP lấy điểm M sao cho PM = PB . Chứng minh BP+PC= AP.

c) Chứng minh .

**Bài 7:** Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì ?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh rằng OD ⊥ AK.

**Bài 8**: Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau ở A, B, O nằm trên (O’). Dây AC của (O) cắt (O’) ở D, dây OE của (O’) cắt (O) ở F. Chứng minh :

a) OD ⊥ BC.

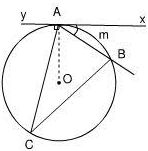
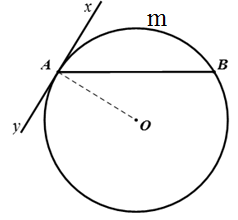
b) Điểm F cách đều ba cạnh của tam giác ABE.

**Bài 9:** Cho hai đường thẳng song song. Một đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng tại A và cắt đường thẳng kia tại B, C. Trên đường tròn lấy một điểm D ( không trùng A, B, C ). Chứng minh rằng A cách đều hai đường thẳng BD và CD.

**Bài 10:** MA và MB là hai tiếp tuyến của (O). Vẽ (M;MA), C là một điểm nằm trên cung AB của (M) ( cung AB nằm trong đường tròn (O) ). Tia AC, BC cắt (O) ở P, Q. Chứng minh rằng : P và Q đối xứng với nhau qua O.

**Bài 11:** Trên cạnh CD của hình vuông ABCD ta lấy một điểm M khác C, D. Các đường tròn đường kính CD và AM cắt nhau tại điểm thứ hai N ( khác D ). Tia DN cắt BC tại P. Chứng minh rằng: AC ⊥ PM.

**CHỦ ĐỀ 10: GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY.**

**1. Định nghĩa**

Cho xy là tiếp tuyến tại A với đường tròn (O).

Góc ∠BAx có đỉnh A nằm trên đường tròn, **cạnh Ax là một tia tiếp tuyến** còn **cạnh kia chứa dây cung AB**. Góc ∠BAx được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Dây AB căng hai cung. Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn.

Trên hình vẽ, góc ∠BAx có cung bị chắn là cung nhỏ AB (hay ) , góc ∠BAy có cung bị chắn là cung lớn AB (hay  )

**2. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.**

 Hoặc 

**3. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.**



**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), (AB < AC). Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho MA2 = MB.MC. Chứng minh rằng: MA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

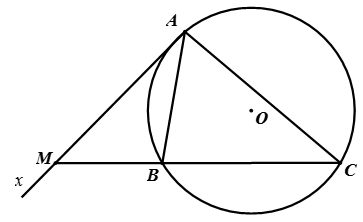
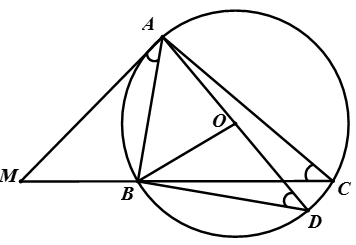
Hướng dẫn

Vì MA2 = MB.MC => MA/MB = MC/MA

Xét ΔMAC và ΔMBA có: ∠M chung

MA/MB = MC/MA

=> ΔMAC ∼ ΔMBA (c.g.c) => ∠MAB = ∠MCA (1)

Kẻ đường kính AD của (O) . Ta có ∠ACB = ∠ADB (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB )

Mà ∠MAB = ∠MCA (chứng minh trên) Suy ra ∠MAB = ∠ADB (2)

Lại có ∠ABD = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠BAD + ∠BDA = 90o (3)

Từ (2) và (3) suy ra ∠BAD + ∠MAB = 90o hay ∠MAO = 90o => OA ⊥ MA

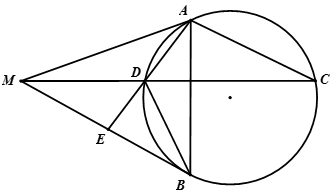
Do A ∈ (O) => MA là tiếp tuyến của (O).

**Bài 2:** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C. Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D. Nối A với D cắt MB tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔABE ∼ ΔBDE; ΔMEA ∼ ΔDEM.

b) E là trung điểm của MB.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔABE ∼ ΔBDE; ΔMEA ∼ ΔDEM.

Xét ΔABE và ΔBDE có:

∠E chung

∠BAE = ∠DBE (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuy ến và dây cung cùng chắn cung BD )

=> ΔABE ∼ ΔBDE (g.g)

Vì AC // MB nên ∠ACM = ∠CMB (so le trong)

Mà ∠ACM = ∠MAE (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD )

Suy ra: ∠CMB = ∠MAE

Xét ΔMEA và ΔDEM có:

∠E chung

∠MAE = ∠CMD (chứng minh trên)

=> ΔMEA ∼ ΔDEM (g.g)

b) Chứng minh E là trung điểm của MB

Theo chứng minh a) ta có: ΔABE ∼ ΔBDE => AE/BE = BE/DE => EB2 = AE.DE

ΔMEA ∼ ΔDEM => ME/DE = EA/EM => ME2 = DE.EA

Do đó EB2 = EM2 hay EB = EM.

Vậy E là trung điểm của MB.

**Bài 3:** Cho điểm C thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm D thuộc đọan AO kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AC và BC lần lượt lại E và F. Tiếp tuyến C với nửa đường tròn cắt EF tại M và cắt AB tại N.

a) Chứng minh M là trung điểm của EF.

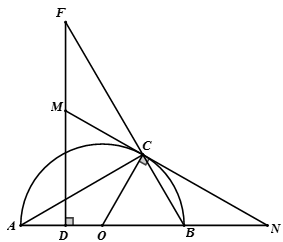
b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

Hướng dẫn

a) Chứng minh M là trung điểm của EF

Ta có ∠MCA = 1/2 sđ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cung AC) (1)

Lại có ∠MEC = ∠AED = 90o - ∠EAD = 90o - 1/2 sđ = 1/2 sđ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ∠MCE = ∠MEC

Vậy ΔMEC cân tại M, suy ra MC = ME.

Chứng minh tương tự ta có MC = MF.

Suy ra ME = MF hay M là trung điểm của EF.

b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

ΔACN cân tại C khi và chỉ khi ∠CAN = ∠CNA

Vì MN là tiếp tuyến với (O) tại C nên OC ⊥ MN

=> ∠CNA = 90o - ∠COB = 90o - 2.∠CAN

Do đó:

∠CAN = ∠CNA ⇔ ∠CAN = 90o - 2.∠CAN ⇔ 3∠CAN = 90o

=> ∠CAN = 30o => Sđ = 60o

Vậy ΔACN cân tại C khi C nằm trên nửa đường tròn (O) sao cho SđBC = 60o .

**Bài 4:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Gọi M là một điểm thay đổi trên tiếp tuyến Bx của (O). Nối AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

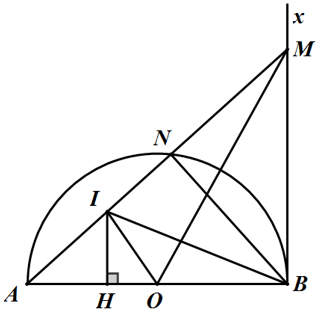
a) Chứng minh: ΔAIO ∼ ΔBMN ; ΔOBM ∼ ΔINB

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: ΔAIO ∼ ΔBMN ; ΔOBM ∼ ΔINB

Vì I là trung điểm của AN => OI ⊥ AN => ∠AIO = ∠ANB = 90o

Do Bx là tiếp tuyến với (O) tại B

=> ∠NBM = ∠IAO = 1/2 sđ

=> ΔAIO ∼ ΔBMN (g.g)

Vì ∠OIM = ∠OBM = 90o

=> các điểm B, O, I, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO

suy ra ∠BOM = ∠BIN

Xét ΔOBM và ΔINB có:

∠OBM = ∠INB

∠BOM = ∠BIN

=> ΔOBM ∼ ΔINB (g.g)

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất

Kẻ IH ⊥ AO ta có: SΔAIO = 1/2 AO.IH

Vì AO không đổi nên SΔAIO lớn nhất ⇔ IH lớn nhất.

Nhận thấy: Khi M chuyển động trên tia Bx thì I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO.

Do đó IH lớn nhất khi IH là bán kính của đường tròn

=> ΔAIO vuông cân tại I nên ∠IAH = 45o.

=> ΔABM vuông cân tại B nên BM = BA = 2R

Vậy khi M thuộc Bx sao cho BM = 2R thì SΔAIO lớn nhất.

**Bài 5:** Cho đường tròn (O; R) và dây AB, gọi I là trung điểm của dây AB. Trên tia dối của tia BA lấy điểm M. Kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn, (C,D ≠ (O)) .

a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của tia OM với (O). Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp .

Hướng dẫn

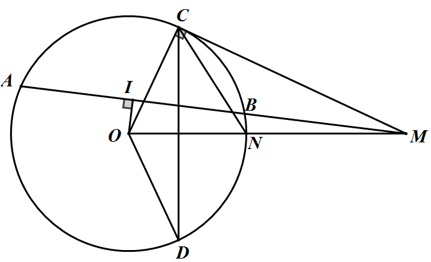
a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

Vì MC, MD là các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn (O)

=> ∠OCM = ∠ODM = 90o (1)

Mặt khác I là trung điểm của dây AB nên OI ⊥ AB hay ∠OIM = 90o (2)

Từ (1), (2) suy ra 5 điểm M, C, D, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp

Vì MC, MD là các tiếp tuyến của (O)

=> MO là phân giác của ∠CMD (3)

Mà: ∠DCN = ∠NCM = 1/2 sđ

Suy ra CN là phân giác của ∠DCM (4)

Từ (3) và (4) suy ra N là giao điểm các đường phân giác trong của ΔCMD

=> N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCMD

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1** : Từ một điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ một tiếp tuyến MT ( T là tiếp điểm ) và một cát tuyến MAB của đường tròn đó .

a) Chứng minh : MT2 = MA . MB

b) Trường hợp cát tuyến MAB đi qua tâm O . Cho MT = 20 cm , và cát tuyến dài nhất cùng xuất phát từ M bằng 50cm. Tính bán kính R của đường tròn (O) .

**Bài** 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M . Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn . Gọi H là hình chiếu của C trên AB .

a) Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc MCH .

b) Giả sử MA =a, MC = 2a . Tính AB và CH theo a .

**Bài 3**: Cho đường tròn (O1) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A . Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O1) tại điểm thứ hai C khác A . Từ B vẽ tiếp tuyến BP với đường tròn (O1) cắt đường tròn (O) tại Q . Chứng minh AP là phân giác của góc 

**Bài 4**: Cho hai đường tròn tâm O , O1 tiếp xúc ngoài nhau tại A . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm phân biệt B , C khác A. Các đường thẳng BA , CA cắt đường tròn (O1) tại P và Q . Chứng minh PQ // BC .

**Bài 5**: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ( AB < AC ) . Đường tròn (I) đi qua B và C , tiếp xúc với AB tại B cắt đường thẳng AC tại D . Chứng minh rằng : OA ⊥ BD .

**Bài 6** : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB= 2R, dây AC và tia tiếp tuyến Bx nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn . Tia phân giác của góc CAB cắt dây BC tại F , cắt nửa đường tròn tại H , cắt Bx ở D.

**a)** Chứng minhFB = DB và HF = HD

b) Gọi M là giao điểm của AC và Bx . Chứng minh AC . AM = AH . AD

c) Tính tích AF .AH + BF.BC theo bán kính R của đường tròn (O)

**Bài 7** : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) ở M . Tiếp tuyến kẻ từ M với đường tròn cắt các tia AB và AC lần lượt ở D và E . Chứng minh :

a) BC // DE

b) ΔAMB và ΔMCE dồng dạng ,ΔAMC và ΔMDB đồng dạng.

c) Nếu AC = CE thì MA2 = MD . ME

**Bài 8** : Cho hai đường tròn (O) và (O1) ở ngoài nhau . Đường nối tâm OO1 cắt các đường tròn (O) và (O1) tại các điểm A , B , C , D theo thứ tự trên đường thẳng . Kẻ tiếp tuyến tuyến chung ngoài EF ( E ∈ (O) , F ∈ (O1) ) . Gọi M là giao điểm của AE và DF , N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MENF là hình chữ nhật .

b) MN ⊥ AD

c) ME . MA = MF . MD

**Bài 9**: Cho tam giác ABC vuông ở A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5cm . Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc ABC tại K . BK cắt AC tại D và BD = 4cm . Tính độ dài BK .

**CHỦ ĐỀ 11: GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN.**

**GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.**

**A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.**

\*) Với đỉnh  nằm trong đường tròn  là giao điểm của hai dây của đường tròn

=> Ta có góc  ;  là các góc có đỉnh bên trong đường tròn.

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.

+ .

+ 

\*) Với đỉnh  nằm ở ngoài đường tròn  là giao điểm của đường éo dài của hai dây của đường tròn

 => Ta có  (hoặc ) là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

Số đo góc nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



\* Cần lưu ý đến các trường hợp sau:

**+** Với đỉnh  nằm ngoài đường tròn .  là tiếp tuyến của , qua  vẽ một cát tuyến cắt đường tròn tại  thì:



+ Với Với đỉnh  nằm ngoài đường tròn .  là 2 tiếp tuyến của , ( là các tiếp điểm) thì:



**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I. BÀI TẬP MẪU.**

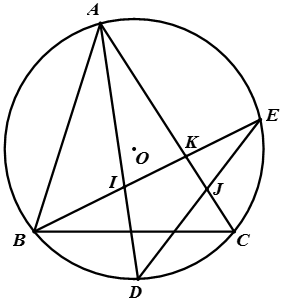
Bài 1: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Vẽ phân giác trong AD của góc A (D ≠ (O)). Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC. Nối BE cắt AD và AC lần lượt tại I và tại K, nối DE cắt AC tại J. Chứng minh rằng:

a) ∠BID = ∠AJE .

b) AI.JK = IK.EJ.

Hướng dẫn

a) Ta có ∠BID là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung BD và cung AE



∠AJE là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung CD và AE



Mà AD là phân giác của góc A nên 

Suy ra ∠BID = ∠ẠJE

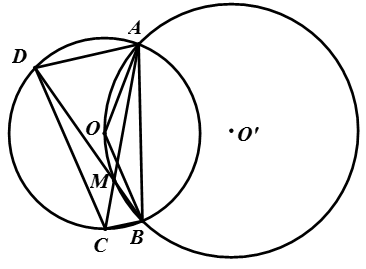
b) Xét ΔAIK và ΔEJK có:

+) ∠AKI = ∠EKJ (đối đỉnh)

+) ∠IAK = ∠KEJ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau BD và cung CD )

Do đó ΔAIK ∼ ΔEJK (g.g)

=> AI/EJ = IK/JK => AI.JK = IK.EJ

**Bài 2:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho O ≠ (O'). Lấy điểm M thuộc đường tròn (O’), M ở trong đường tròn (O). Tia AM và BM cắt đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng:

a)  (Cung nhỏ của đường tròn (O))

b) Tứ giác ABCD là hình thang cân.

**Hướng dẫn**

a) Vì ∠AMB là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung AB và CD nên: 

Mặt khác: ∠AMB = ∠AOB (hai góc nội tiếp (O’) cùng chắn cung AB lớn)

∠AOB = sđ  (góc ở tâm đường tròn (O)).



b) Trong đường tròn (O):

 ; 

Mà  => 

Vì hai góc này ở vị trí so le trong,

suy ra AD // BC (1)

Theo câu a), ta có: ∠ADC = ∠DAB (2 góc chắn 2 cung bằng nhau) (2)

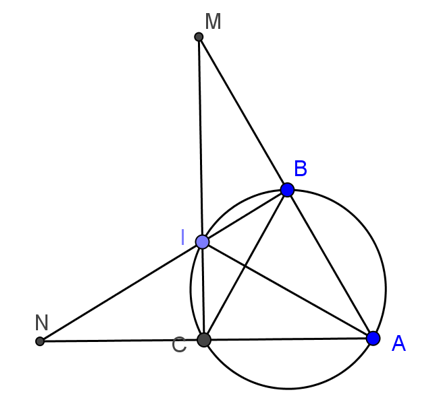
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình thang cân.

**Bài 3:** Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Điểm I chuyển động trên cung nhỏ BC. AB cắt CI tại M, AC cắt BI tại N. Chứng minh rằng:

a) BC2 = BM.CN

b) ∠AIN có số đo không đổi.

**Hướng dẫn**



a) Vì ΔABC đều nên: 

Ta có: ∠ANB là góc có đỉnh ngoài đường tròn (O) nên:



Lại có:  (góc nội tiếp (O) chắn cung BI)



Suy ra ∠ANB = ∠BCI (1)

Tương tự ta có: ∠AMC = ∠CBI (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔBCM ∼ ΔCNB (g-g) => BC/NC = BM/BC => BC2 = BM.NC

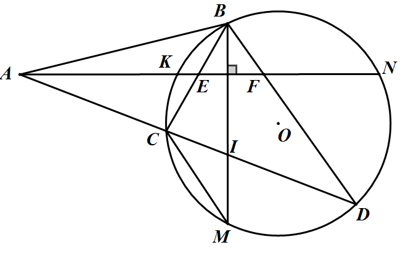
b) Ta có: ∠AIB = ∠ACB = 60o

=> ∠AIN = 180o - ∠AIB = 120o không đổi

**Bài 4:** Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD với đường tròn (C nằm giữa A và D). Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của ∠BAC, BM cắt CD tại I. Chứng minh rằng:

a) BM là tia phân giác của

b) MD2 = MI.MB

**Hướng dẫn**

Giả sử tia phân giác của ∠BAC cắt BC tại E, cắt BD tại E và cắt đường tròn (O) tại K.

a) Ta có:

Mà ∠A1 = ∠A2 (gt)

=>  ⬄ 

⇔ ∠BEF = ∠BFE

=> ΔBEF cân tại B.

Mà BM là đường cao của ΔBEF

Suy ra BM là tia phân giác của ∠CBD

b) Vì BM là phân giác của ∠CBD



Do đó: ΔMDI ∼ ΔMBD (g.g)

=> MD2 = MI.MB

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm E nằm ngoài đường tròn. Đường thẳng kẻ từ E song song với AD cắt BC tại F. Kẻ tiếp tuyến FG với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) 

b) ΔFEC ∼ ΔFBE, từ đó suy ra EF2 = FB.FC

**Bài 2:** Cho hai đường tròn (O) và (O’) ở ngoài nhau. Đường thẳng OO’ cắt (O) và (O’) lần lượt lại các điểm A, B, C, D. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF của hai đường tròn (E ≠ (O), F ≠ (O')) . Gọi M là giao điểm của AE và DF, N là giao điểm của EB và DC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MENF là hình chữ nhật.

b) MN ⊥ AD

c) ME.MA = MF.MD.

**Bài 3:** Trên đường tròn (O; R) đặt liên tiếp các dây cung: AB = BC = CD < R. AB cắt CD tại E. Tiếp tuyến tại B và D với đường tròn (O) cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

a) ΔEBC ∼ ΔFBD

b) ΔEBF ∼ ΔCBD

c) BC // EF.

**Bài 4:** Cho tứ giác ABCD có A, B, C, D nằm trên đường tròn (O); AB và CD cắt nhau tại M; AD và BC cắt nhau tại N.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD nếu ∠AMD = 30o và ∠BND = 40o .

b) Hai phân giác của góc M và góc N cắt nhau tại I. Chứng minh rằng IM ⊥ IN

**Bài 5**: Cho đường tròn tâm O và điểm M ngoài đường tròn đó . Từ M kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đến đường tròn ( B nằm giữa M và C ) . Phân giác của góc  cắt BC ở D , cắt đường tròn ở E . Chứng minh :

a) MD = MA

b) AD . AE = AC . AB

**Bài 6**: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E . Chứng minh rằng :

a) ΔBDI là tam giác cân .

b) DE là đường trung trực của IC .

c) IF // BC ( F là giao điểm của DE và AC ).

**Bài 7**: Cho đường tròn tâm O và điểm S ở ngoài đường tròn . Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SD và cát tuyến SBC tới đường tròn ( B ở giữa S và C ).

a) Phân giác của góc cắt dây cung BC ở M . Chứng minh SA = SM .

b) AM cắt đường tròn ở E. Gọi G là giao điểm của OE và BS; F là giao điểm của AD với BC . Chứng minh SA2 = SG . SF .

c) Biết SB = a ; Tính SF khi BC = ****

**Bài 8**: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (I) kẻ hai tiếp tuyến ME và MF ( E và F là hai tiếp điểm ) . Kẻ dây EG của đường tròn (I) song song MF. Gọi H là giao điểm của MG với (I) và K là giao điểm của EH với MF .

a) Chứng minh KF2 = KE . KH .

b) Chứng minh K là trung điểm của MF .

**Bài 9**: Cho đường tròn (O) đường kính EF và điểm G nằm trên nằm trên đường tròn (O) sao cho EG > GF. Trên tia GF lấy điểm H sao cho GH =GE . Vẽ hình vuông EGHI có đường chéo GI cắt (O) tại K .

a) Chứng minh ΔKFH cân .

b) Tiếp tuyến tại E với đường tròn (O) cắt FK ở M . Chứng minh ba điểm M , I , H thẳng hàng

**Bài 10**: Cho tứ giác ABCD có A, B, C , D nằm trên đường tròn (O) . Các tia AB và DC cắt nhau tại E , các tia CB và DA cắt nhau tại F . Hai phân giác của các góc **** và **** cắt nhau tại K **.** Chứng minh rằng : = 900 .

**Bài 11**: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . điểm D di chuyển trên cung AC . Gọi E là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng :

a) 

b) Tích AE . BF không đổi .

**Bài 12**: Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A,B và C . Gọi M,N và P theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB,BC và AC. BP cắt AN tại I , NM cắt AB tại E . Gọi D là giao điểm của AN và BC . Chứng minh rằng :

a) ΔBNI cân .

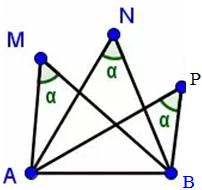
b) AE.BN = EB.AN .

c) EI // BC

d) 

**CHỦ ĐỀ 12: CUNG CHỨA GÓC.**

**A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.**

**1/ Cung chứa góc.**

**\*** Nếu các điểm (ví dụ M, N, P) nằm cùng phía đối với đoạn thẳng AB và cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau  thì ta nói các điểm này thuộc cùng một cung chứa góc 𝛂 dựng trên đoạn AB.

**2/ Bài toán quỹ tích.**

\* Để chứng minh một điểm M chạy trên một cung tròn cố định (Tìm quỹ tích điểm M)

**Bước 1:** Dự đoán điểm M sẽ chạy trên cung tròn dựng trên đoạn thẳng Cố Định nào.

**Bước 2**: Xem đoạn cố định (ví dụ đoạn AB) là dây cung của đường tròn nào đã biết, từ đó chỉ ra góc nội tiếp có số đo không đổi chắn cung AB. Hoặc tìm một điểm N cố định với  có số đo không đổi.

**Bước 3**: Chứng minh  bằng số đo của góc không đổi.

=> Điểm M thuộc cung chứa góc không đổi dựng trên đoạn AB

\* Để hoàn thiện một bài Toán tìm quỹ tích điểm ta cần chứng minh phần thuận và phần đảo.

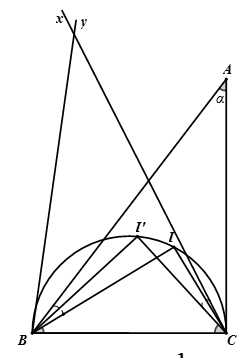
+ Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

+ Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

+ Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm có tính chất T là hình H.

**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho ΔABC có cạnh BC cố định và ∠A = α không đổi (0o < α < 180o). Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC

**Hướng dẫn giải**

\* Phần thuận:

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên BI là phân giác của ∠B

=> ∠IBC = 1/2∠ABC

CI là phân giác ∠ACB, do đó: ∠ICB = 1/2 ∠ACB

Suy ra: ∠IBC + ∠ICB = 90o - α

Trong ΔBCI có ∠BIC = 180o - 1/2(∠ABC + ∠ACB)

=180o - (90o - 1/2 α) = 90o + 1/2 α

=> Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới một góc 90o + 1/2α

=> I thuộc cung chứa góc 90o + 1/2 α dừng trên đoạn thẳng BC (trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).

\* Phần đảo:

Lấy I’ thuộc cung chứa góc 90o + 1/2 α nói trên.

Vẽ các tia Bx và Cy sao cho BI’ là tia phân giác của ∠CBy và CI’ là tia phân giác của góc ∠BCx.

Hai tia By và Cx cắt nhau tại A’.

Vì I’ thuộc cung chứa góc 90o + 1/2 α dựng trên đoạn BC nên: ∠BI'C = 90o + 1/2 α

Do đó: ∠I'BC + ∠I'CB = 180o - ∠BIC = 90o - 1/2α

Vì BI’ là phân giác của ∠A'BC và CI’ là phân giác của ∠A'CB

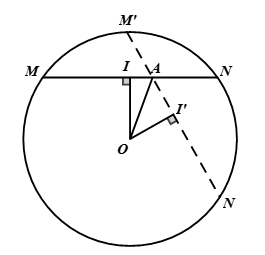
=> ∠A'BC + ∠A'CB = 2(∠I'BC + ∠I'CB) = 180o - α

Mặt khác I’ là giao điểm các tia phân giác của ∠A'BC và ∠A'CB

=> I’ là tâm đường tròn nội tiếp ΔA'BC

\* Kết luận: Quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC là cung chứa góc 90o + 1/2 α dựng trên đoạn BC.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm trong đường tròn . Một đường thẳng d quay quanh điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

**Hướng dẫn giải**

\* Phần thuận:

Vì I là trung điểm của dây MN suy ra OI ⊥ MN

=> ∠OIA = 90o

Vì điểm I nhìn đoạn OA cố định dưới góc 90o nên I nằm trên đường tròn đường kính OA.

\* Phần đảo:

Lấy điểm I’ bất kỳ thuộc đường tròn đường kính OA.

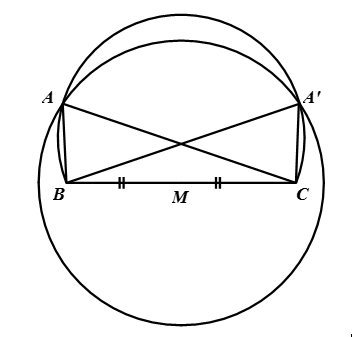
Nối AI’ cắt đường tròn (O) tại M’ và N’

Vì I’ thuộc đường tròn đường kính OA nên ∠OI'A = 90o hay OI' ⊥ M'N'

=> I’ là trung điểm của M’N’ (theo quan hệ giữa đường kính và dây cung)

\* Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của MN là đường tròn đường kính OA.

**Bài 3:** Dựng ΔABC biết BC = 8cm; ∠A = 60o và trung tuyến AM = 5cm.

**Hướng dẫn giải**

\* Phân tích:

Giả sử đã dựng được ΔABC thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vì ∠BAC = 60o

=> A thuộc cung tròn chứa góc 60o dựng trên đoạn BC.

Lại có: AM = 5cm

=> A thuộc đường tròn tâm M, bán kính 5cm.

\* Cách dựng:

Dựng đoạn thẳng BC = 8cm. Xác định trung điểm M của BC.

Dựng cung chứa góc 60o trên đoạn thẳng BC.

Dựng đường tròn tâm M, bán kính 5cm. Gọi giao điểm của cung chứa góc và đường tròn (M, 5cm) là A và A’.

Ta có hai tam giác ABC và A’BC đều thỏa mãn đề bài.

\* Chứng minh:

Vì A thuộc cung chứa góc 60o dựng trên đoạn BC nên ∠A = 60o

Lại có: A thuộc đường tròn (M, 5cm) nên AM = 5cm.

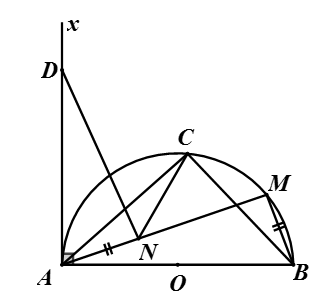
BC = 8cm theo cách dựng.

\* Biện luận: Bài toán luôn có nghiệm hình.

**Bài 4:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, có C là điểm chính giữa của cung AB. M là một điểm chuyển động trên cung BC . Lấy điểm N thuộc đoạn AM sao cho AN = MB. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn; D là điểm thuộc Ax sao cho AD = AB .

a) Chứng minh rằng ΔMNC vuông cân.

b) Chứng minh rằng DN ⊥ AM

c) Tìm quỹ tích điểm N.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: ΔANC = ΔBMC (c.g.c)

Do đó: CN = CM

Lại có: ∠CMA = 1/2 SđAC = 1/2 .90o = 45o

Từ (1) và (2) suy ra ΔMNC vuông cân tại C.

b) Xét ΔAND và ΔBMA có:

AD = AB

∠DAN = ∠ABM

AN = BM (gt)

=> ΔAND = ΔBMA (c-g-c) do đó ∠AND = ∠BMA .

Mà ∠BMA = 90o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra ∠AND = 90o hay DN ⊥AM.

c) Tìm quỹ tích điểm N.

\* Phần thuận:

Vì ∠AND = 90o N nhìn đoạn AD cố định dưới một góc 90o

=> N thuộc đường tròn đường kính AD.

Giới hạn: Nếu M ≡ A thì N ≡ C, nếu M ≡ C thì N ≡ A do đó quỹ tích điểm N là cung nhỏ AN của đường tròn đường kính AD (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Ax có chứa nửa đường tròn (O)).

\* Phần đảo: Học sinh tự chứng minh.

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1**: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và dây MN có độ dài bằng bán kính ( M thuộc cung AN ) . Các tia AM và BN cắt nhau ở I . Các dây AN và BM cắt nhau ở K .

a) Tính  và .

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí .

c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác KAB .

d) AB và IK cắt nhau tại H . Chứng minh HA.HB = HI.HK .

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất ? Tính giá trị diện tích lớn nhất đó theo R .

**Bài 2**: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm chính giữa của cung AB . M là một điểm chuyển động trên cung CB . Gọi H là hình chiếu của C trên AM . Các tia OH và BM cắt nhau tại I . Tìm quỹ tích các điểm I .

**Bài 3**:Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định . Một điểm C chạy trên đường tròn . Kẻ CD vuông góc với AB . Trên OC đặt một đoạn OM = CD . Tìm quỹ tích các điểm M .

**Bài 4**: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó .Vẽ hình vuông BMDC ở ngoài tam giác AMB .Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn cắt CD ở E .

a) Chứng minh AB = BE .

b) Tìm quỹ tích các điểm C .

**Bài 5**: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác . M ,N là các tiếp điểm trên các cạnh AC , BC . Gọi H là giao điểm của AI và MN . Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn đường kính BI .

**Bài 6**: Cho hình bình hành ABCD . Tia phân giác của góc D cắt các đường thẳng AB , BC theo thứ tự ở I , K . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK . Chứng minh rằng :

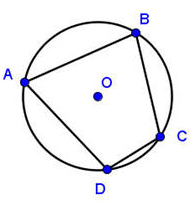
a) OB ⊥ IK

b) Điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

**Bài 7**: Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định , M là một điểm chạy trên đường tròn . Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI = 2MB. Tìm tập hợp các điểm I khi M chạy trên đường tròn (O) .

**CHỦ ĐỀ 13: TỨ GIÁC NỘI TIẾP**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

1. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp). Đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng .

3. Nếu trong một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

4. Nếu một tứ giác lồi có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

5. Chú ý:

+ Chứng minh 4 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh tứ minh tứ giác nội tiếp.

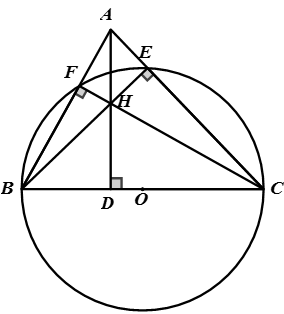
+ Chứng minh 5 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh hai tứ giác (có chung 3 điểm) cùng nội tiếp.

**B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BCEF nội tiếp.

b) HA.HD = HB.HE = HC.HF.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có ∠BEC = ∠BFC = 90o

=> các điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Vẽ đường tròn đường kính BC. Xét ΔBHF và ΔCHE có:

+) ∠EBF = ∠ECF (hai góc nội tiếp cùng chắn ).

+) ∠FHB = ∠EHC(đối đỉnh).

Suy ra ΔBHF ∼ ΔCHE (g.g)

BH/CH = HF/HE hay HB.HE = HC.HF (1)

Chứng minh tương tự ta có: HA.HD = HB.HE (2)

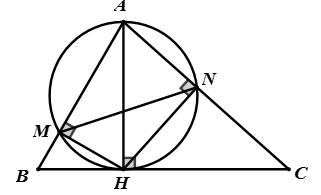
Từ (1) và (2) suy ra: HA.HD = HB.HE = HC.HF.

**Bài 2:** Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Các điểm M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh rằng:

a) AM.AB = AN.AC.

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: ∠AMH = ∠ANH = 90o (gt)

=> các điểm M, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

=> ∠AMN = ∠AHN (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mặt khác: ∠AHN = ∠ACH

Do đó ΔAMN ∼ ΔACB (g.g)

=> AM/AC = AN/AB hay AM.AB = AN.AC.

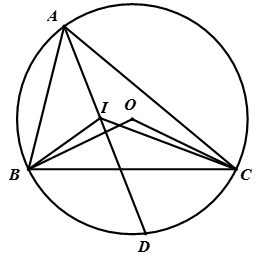
b) Theo chứng minh câu a) ta có:

∠AMN = ∠ACH

Suy ra ∠BMN + ∠ACH = ∠BMN + ∠AMN = 180o

Vậy tứ giác BMNC nội tiếp.

**Bài 3:** Cho tam giác ABC có góc. Các điểm O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng bốn điểm B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

Gọi D là giao điểm khác của A của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta có: ∠BID = ∠IAB + ∠ABI = 1/2 ∠A + 1/2 ∠B

∠CID = ∠IAC + ∠ACI = 1/2 ∠A + 1/2 ∠C

Do đó: ∠BIC = ∠BID + ∠CID

= 1/2 ∠A + 1/2∠B + 1/2∠C + 1/2∠A =1/2∠A + 90o

Mặt khác: ∠BOC = 2∠A = 120o.

Do đó hai điểm I và O cùng nhìn đoạn BC dưới những góc bằng nhau.

Ngoài ra hai điểm I và O cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa A, bờ BC.

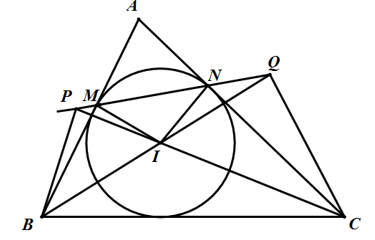
Do đó B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC nhọn có ∠A > ∠B > ∠C. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là các giao điểm của CI, BI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác INQC nội tiếp.

b) Tứ giác BPQC nội tiếp.

**Hướng dẫn giải**

a) Vì đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC tại M và N nên AM = AN

=> ΔAMN cân tại A.

Ta có: ∠CNQ = ∠ANM (đối đỉnh)

= (180o - ∠A)/2 =(∠B + ∠C)/2

=∠IBC + ∠ICB = ∠CIQ

Tứ giác INQC có hai điểm liên tiếp I và N cùng nhìn cạnh QC dưới các góc bằng nhau nội tiếp được một đường tròn.

b) Vì INQC là tứ giác nội tiếp nên ∠INC = ∠IQC

Vì AC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N nên IN ⊥ AC hay ∠INC = 90o

=> ∠IQC = ∠BQC = 90o  (1)

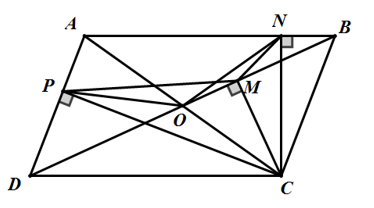
Chứng minh tương tự câu a) ta có tứ giác IMPB nội tiếp

=> ∠IMB = ∠IPB = 90o (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ∠BPC = ∠BQC = 90o

=> tứ giác BPQC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

**Bài 5:** Cho hình bình hành ABCD có ∠BAD = 90o, có tâm là O. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên BD, AD, AB. Chứng minh bốn điểm M, N, P, O cùng thuộc một đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: ∠CPA = ∠CNA = 90o (gt)

=> tứ giác ANCP nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC.

Suy ra ∠PON = 2∠PCN

Lại có: ∠PCN + ∠NAP = 180o

=> ∠PCN = 180o - ∠NAP = ∠ABC (do AD // BC)

Do đó ∠PON = 2∠ABC (1)

Mặt khác ∠PMN = 180o - (∠PMB + ∠NMD)

Mà tứ giác CDNM nội tiếp đường tròn đường kính CD

=> ∠NMD = ∠NCD = 90o - ∠CDN = 90o - ∠ABC

Lại có tứ giác BCMP nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> ∠PMB = ∠PCB = 90o - ∠ABC

=> ∠PCB = 180o - (90o - ∠ABC + 90o - ∠ABC) = 2∠ABC (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ∠PON = ∠PMN do đó tứ giác POMN nội tiếp.

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax và dây AC bất kỳ. Tia phân giác của góc xAC cắt nửa đường tròn tại D, các tia AD và BC cắt nhau tại E.

a) Chứng minh ΔABE cân.

b) Đường thẳng BD cắt AC tại K, cắt tia Ax tại F . Chứng minh tứ giác ABEF nội tiếp.

c) Cho . Chứng minh AK = 2CK.

**Bài 2.** Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB; AC và cát tuyến AMN không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm MN.

a) Chứng minh AB2 = AM. AN

b) Chứng minh tứ giác ABIO nội tiếp .

c) Gọi D là giao điểm của BC và AI. Chứng minh 

**Bài 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của cắt BC tại D và cắt đường tròn tại M. Phân giác ngoài tại Acắt đường thẳng BC tại E và cắt đường tròn tại N. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh:

a) MN vuông góc với BC tại trung điểm của BC.

b) 

c) AK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Bài 4.** Cho ba điểm A, B,C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a) Chứng minh AM2 = AN2 = AB. AC

b) Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh IN // AB

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

**Bài 5**. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R . Điểm C nằm trên (O) mà AC > BC. Kẻ CD ⊥ AB ( D ∈ AB ) . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại E. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AE tại M. OM cắt AC tại I . MB cắt CD tại K.

a) Chứng minh M là trung điểm AE.

b) Chứng minh IK // AB.

c) Cho OM = AB . Tính diện tích tam giác MIK theo R.

**Bài 6.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ; BF cắt EC tại H. Tia AH cắt đường thẳng BC tại N .

a) Chứng minh tứ giác HFCN nội tiếp .

b) Chứng minh FB là phân giác của .

c) Giả sử AH = BC . Tính số đo góc  của ΔABC.

*( Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 1999- 2000)*

**Bài 7.** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) ( C là tiếp điểm ). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC. Chứng minh:

a) Tứ giác EFDA nội tiếp .

b) AF là phân giác của .

c) Tam giác EFA và tam giác BDC đồng dạng .

d) Các tam giác ACD và ABF có cùng diện tích .

*( Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 2000- 2001)*

**CHỦ ĐỀ 14: ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN. CUNG TRÒN.**

**DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN. HÌNH QUẠT TRÒN.**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**I/ Độ dài đường tròn. Cung tròn**

**1. Độ dài C (chu vi) của một đường tròn** bán kính R là C = 2πR

Nếu gọi d là độ dài đường kính của đường tròn (d = 2R) thì C = π.d

Trong đó π ≈ 3,14

**2. Trên đường tròn bán kính R, độ dài L** của một cung no là: L ≈ πRn/180 .

**II/ Diện tích hình tròn, quạt tròn.**

**1. Diện tích S của một hình tròn** bán kính R là: S= πR2

**2. Hình quạt tròn** là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung no la:

Squạt = πR2n / 360 hay Squạt = L.R/2 (L là độ dài cung no của hình quạt tròn)

**3. Hình viên phân** là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy.

Diện tích hình viên phân bằng hiệu (hoặc tổng) diện tích của một hình quạt tròn và diện tích của một tam giác nếu góc ở tâm hình quạt nhỏ hơn 180o (hoặc lớn hơn 180o) .

**4. Hình vành khăn** là phần hình tròn giới hạn bởi đường tròn đồng tâm

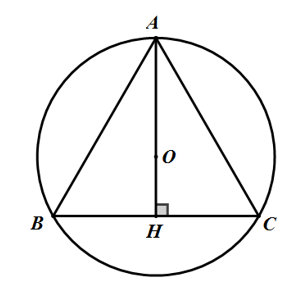
Diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm bán kính R1 và R2 là:

Svành khăn = π(R12 - R22) .

**B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I/ BÀI TẬP MẪU.**

**Bài 1:** Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 5cm.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử ΔABC đều cạnh 5cm nội tiếp (O; R).

Nối OA cắt BC tại H => AH ⊥ BC và H là trung điểm của BC.

ΔAHB vuông tại H nên: AH2 = AB2 - BH2 = 52 - (5/2)2 = 75/4

=> AH = 5/2 (cm)

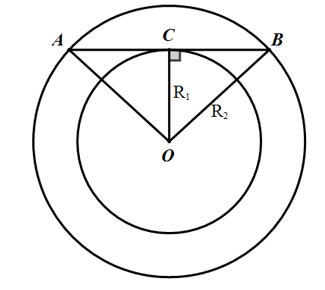
Vì ΔABC đều có O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là trọng tâm của tam giác đó, do đó:

OA = 2/3 AH = 2/3 . 5/2 => R = OA = 5/3

Độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: C = 2πR = 10. π/3 ≈ 54,39(cm)

**Bài 2:** Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính lần lượt là R1 = 3cm; R2 = 6cm. Một dây AB của đường tròn (O;R1) tiếp xúc với đường tròn (O;R2) tại C.

a) Tính độ dài cung nhỏ AB của đường tròn (O;R2) .

b) Tính độ dài đường tròn đường kính AB.

**Hướng dẫn giải**

a) Vì tiếp tuyến tại C với đường tròn (O;R1) nên OC ⊥ AB

Tam giác OAC vuông tại C có: cos ∠AOC = OC/OA = 1/2

=> ⊥AOC = 60o => ∠AOB = 120o

Vậy độ dài cung AB của đường tròn (O;R2) là:

I = πRn/180 ≈ 12,56 (cm)

b) Vì tam giác OAC vuông tại C nên: AC2 = OA2 - OC2 = 36 - 9 = 27

=> AC = 3√3 (cm)

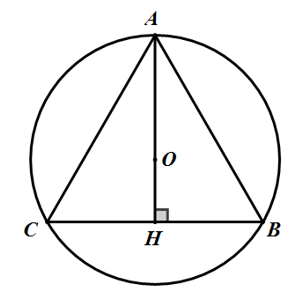
Trong đường tròn (O;R2) ta có: OC ⊥ AB

=> C là trung điểm của AB

=> Đường tròn đường kính AB có tâm là C và bán kính R= AC = 3 (cm).

Vậy độ dài của đường tròn đường kính AB là: C = 2πR ≈ 32,63(cm2

**Bài 1:** Tính diện tích hình tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC đều cạnh a.

**Hướng dẫn giải**

Nối AO cắt BC tại H

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên O đồng thời là trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC. Do đó:

AH ⊥ BC và HB = HC = BC/2 = a/2

Xét tam giác vuông ABH vuông tại H có:

AH2 = AB2 - BH2 = a2 - (a/2)2 = 3a2 /4

=> AH = a/2

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên: AO = 2/3 AH = 2/3 . a/2 = a/3

Vậy diện tích hình tròn (O) là: S = πR2 = π(a/3)2 = πa2/3 (đvdt)

**Bài 2:** Một hình vuông và một hình tròn có diện tích bằng nhau. Hỏi hình nào có chu vi lớn hơn?

**Hướng dẫn giải**

Giả sử hình vuông có cạnh a và hình tròn có bán kính R.

Vì hình vuông và hình tròn có diện tích bằng nhau nên ta có: a2 = πR2 ⇔ a = R

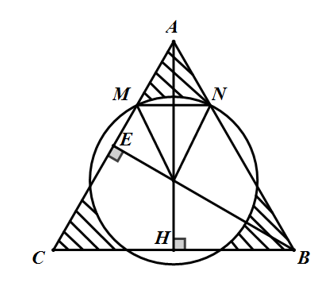
Mặt khác: Chu vi hình vuông là C1 = 4a = 4R

Chu vi hình tròn là C2 = 2πR

=>  => C1 > C2

Vậy hình vuông có chu vi lớn hơn.

**Bài 3:** Cho tam giác ABC đều có tâm O, cạnh 6cm. Vẽ đường tròn (O;2cm). Tính diện tích của phần tam giác nằm ngoài hình tròn (O).

**Hướng dẫn giải**

Gọi diện tích phần phải tính (phần gạch sọc trên hình vẽ) là S thì: S = 3(SAMON - SQuạt tròn OMN)

Giả sử giao điểm của đường tròn (O; 2cm) với hai cạnh AB, AC lần lượt là M và N.

Nối CO cắt AB tại E => CE là đường cao của tam giác đều ABC cạnh 6cm nên: CE = 6/2 = 3 (cm)

Xét tam giác OEM vuông tại E nên:

EM2 = OM2 - OE2 = 22 - ()2 = 1 (cm)

=> EM = 1(cm) => AM = 2EM = 2cm = AN

Dễ thấy tứ giác AMON là hình thoi có OA = OC = 2 (cm) và MN = 2cm (do tam giác MON đều) nên: SAMOC = AO.MN/2 = 2 (cm2)

Diện tích hình quạt tròn OMN là: Squạt tròn OMN = πR2n /360 = 2π/3 (cm2)

Do diện tích tam giác cong AMN là: SAMN = SAMON - Squạt tròn OMN = 2 - 2π/3 (cm2)

Vậy diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn là: S = 3(2 - 2π/3) = 2(3 - π) ≈ 4,1 (cm2)

**II/ LUYỆN TẬP.**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và haiđiểm M và N bất kì thuộc đường tròn sao cho góc MON =150o .

a) Tính độ dài cung MN.

b) Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi góc MON.

**Bài 2:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Biết góc A bằng 60°, tính diện tích hình viên phân tạo bởi cung nhỏ BC và dây BC.

**Bài 3:** Từ điểm c ở ngoài (O ; R) sao cho OC = 2R, kẻ tiếp tuyến CA, CB của đường tròn (O) (B, A là tiếp điểm). Tia oc cắt (O) tại D.

a) Tính diện tích phần tam giác ABC nằm ngoài hình tròn (O ; R).

b) Tính diện tích hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

**Bài 4:** Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại c với đường tròn cắt AB, AD kéo dài lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh AB.AE = AD.AF.

b) Tính diện tích phần tam giác AEF nằm ngoài đường tròn (O), biết AB = 6 và AD = 6

**Bài 5.** Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MP, MP’ với đường tròn. Dây PP’ cắt OM tại N và cắt OA tại B.

a) Chứng minh rằng : OA.OB = OM.ON = R2

b) Chứng minh tứ giác POMA nội tiếp được trong đường tròn. Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác POMA chuyển động trên đường cố định nào ?

c) Cho góc PMP’ = 60° và R = 8, tính diện tíeh phần mặt phẳng giới hạn bởi MP, MP’ và cung lớn PP’.

**Bài 6:** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R, là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung AC bằng 60o, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích hình giới hạn bới nửa đường tròn đường kính AB và phân ngoài đường tròn

**TỔNG ÔN HÌNH LỚP 9 CHƯƠNG III**

**I. GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN**

**Bài 1 (1)** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH. Đường tròn này cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở D và E

1. Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng
2. Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O kẻ từ D và E cắt cạnh BC tương ứng tại M và N. Chứng minh M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn HB và HC
3. Cho AB = 8 cm, AC = 19 cm. Tính diện tích tứ giác MDEN

**Hướng dẫn:**

1. Dễ chứng minh
2. Vì MD = MH và OD = OH, nên OM là trung trực của HD. Suy ra OM //AB. Từ đó OM là đường trung bình của tam giác AHB. Suy ra MB = MH. Tương tự cho NC = NH
3. SMDEN = 2.SMON = 2.SABC = 38 (cm2)

**Bài 2 (1)**  Đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D). Chứng minh:

1. Góc BED = góc DAE
2. DE2 = DA.DB

**Hướng dẫn:**

1. Góc BED = góc BCE + góc CBE = góc DAB + góc EAB = góc DAE
2. Ta có góc ADE = góc ABC = góc CAB = góc EDB. Từ đó chứng minh ∆BED đồng dạng với ∆EAD. Suy ra đpcm

**Bài 3 (1)** Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn. Qua trung điểm B của đoạn PA vẽ cát tuyến BCD với (O) (theo thứ tự ấy) Các đường thẳng PC và PD cắt (O) lần lượt ở E và F. Chứng minh

1. Góc DCE = góc DPE + góc CAF
2. AB2 = BC. BD
3. AP // EF

**Hướng dẫn:**

1. 2(Góc DPE + góc CAF) = Sđ cung ED – Sđ cung CF + Sđ cung CF = 2.Góc DCE (đpcm)
2. Chứng minh tam giác BAC đồng dạng với tam giác BDA. Suy ra đpcm
3. Từ kết quả câu b) ta chứng minh được tam giác BPC đồng dạng với tam giác BDP (c. g. c). suy ra góc BPC = góc BDP = góc PEF. Suy ra đpcm

**II- TỨ GIÁC NỘI TIẾP**

**Bài 1 (2).** Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Tia BO cắt (O) tại M, gọi I là giao của BM và DE, K là giao của AC và HM

1. Chứng minh các tứ giác AEDC và CMID nội tiếp
2. Chứng minh OK vuông góc với AC
3. Cho góc AOK = 600. Chứng minh tam giác HBO cân

K

H

I

**O**

A

B

M

D

C

E

.

**Hướng dẫn:**

1. Góc IDB = góc IMC (cùng = góc BAC), suy ra tứ giác CMID nội tiếp
2. Hãy chứng minh tứ giác AMCH là hình bình hành. Suy ra OK vuông góc với AC
3. Theo giả thiết 2OK = OA = OB. Mà OK là đường trung bình của tam giác MBH, nên 2OK = BH. Suy ra đpcm

**Bài 2 (2)**  Cho hai đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần B hơn, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A kẻ cát tuyến song song với EF cắt hai đường tròn (O1) và (O2) thứ tự tại C, D. Đường thẳng CE và DF cắt nhau ở I. Chứng minh:

1. ∆IEF = ∆AEF
2. IA vuông góc với CD
3. Tứ giác IEBF nội tiếp
4. Đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

**Hướng dẫn:**

1. Chứng minh ∆IEF = ∆AEF (g.c.g),
2. Từ a) suy ra IE = AE. Tam giác IEA cân tại E có EF là phân giác góc IEA nên cũng đồng thời là đường cao. Suy ra đpcm
3. Góc IEB + góc IFB = Góc BAC + góc BAD = 1800. từ đó suy ra đpcm
4. Gọi J là giao điểm của AB và EF. Hãy chứng minh JE2 = JB.JA và JF2 = JB.JA, để suy ra đpcm

B

A

C

F

D

E

I

J

**Bài 3 (2)**  Từ điểm M nằm ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A và B là các tiếp điểm), và một cát tuyến MCD (theo thứ tự ấy). Gọi I là trung điểm của CD. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng MO, MD, OI

1. Chứng minh R2 = OE.OM = OI.OK
2. Chứng minh năm điểm M, A, B, O, I cùng thuộc một đường tròn
3. Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD. Chứng minh góc DEC = 2.góc DBC

M

B

**O**

K

C

I

A

F

E

D

**Hướng dẫn:**

1. Áp dụng hệ thức lượng với tam giác vuông OAM, kết hợp xét hai tam giác đồng dạng MIO và KEO (g.g), suy ra đpcm
2. Vì các góc MAO, MBO, MIO cùng bằng 900. Suy ra đpcm
3. Chứng minh được ME.MO = MC.MD (= MA2), suy ra hai tam giác MEC và MDO đồng dạng (c.g.c), nên góc MEC = góc MDO. Suy ra tứ giác CEOD nội tiếp. Suy ra đpcm

**Bài 4 (2)**  Cho hai đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại P và Q, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần P hơn, có tiếp điểm với (O1) và (O2) thứ tự là A và B. Tiếp tuyến của (O1) tại P cắt (O2) tại điểm thứ hai D khác P. Đường thẳng AP cắt đường thẳng BD tại R. Hãy chứng minh.

1. Góc QAP = góc QPD = góc QBD và bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn
2. Tam giác BPR cân
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB và RB

Q

P

R

B

D

A

**Hướng dẫn:**

1. Vì góc QAP = góc QBD (= góc QPD) nên bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn
2. Ta có góc BRP = góc BQA (theo a) = góc BQP + góc AQP = góc ABP + góc BAP = góc BPR (góc ngoài của tam giác). Suy ra đpcm
3. Ta có góc BPR = góc ABP + góc BAP = góc PQB + góc BQR (theo a) = góc PQR, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB. Tương tự cho RB

**Bài 5 (2)** Cho hình vuông ABCD, điểm M thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và điểm N thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho góc MAN =450. BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q.

1. Chứng minh tứ giác ABMP nội tiếp
2. Chứng minh năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn
3. Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (A; AB) khi M và N thay đổi
4. Kí hiệu diện tích của tam giác APQ là S1 và diện tích của tứ giác PQMN là S2. Chứng minh tỉ số  không đổi khi M và N thay đổi.

**Hướng dẫn:**

1. Góc PAM = góc PBM = 450

A

Q

P

C

D

H

M

B

N

1. Từ câu a suy ra góc APM = 1800 – góc ABM = 900. Tương tự góc AQN = 900. Từ đó năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn
2. Kẻ AH vuông góc với MN. Góc AMH = góc APQ = góc AMB. Nên ∆AMH = ∆AMB (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra AH = AB. Suy ra đpcm
3. Tam giác APQ đồng dạng với tam giác AMN nên SAPQ: SAMN = (AP : AM)2= cos2 (450) = . Từ đó S1 = S2

**Bài 6 (2)** Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy một điểm E. Đường thẳng BE cắt AC tại F

1. Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp
2. Kéo dài DE cắt AC ở K. Tia phân giác góc CKD cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác góc CBF cắt DE và CF tại P và Q. Chứng minh tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ, và tam giác KPQ cân
3. Tứ giác MPNQ là hình gì? Vì sao?
4. Gọi r, r1, r2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADB, ADC. Chứng minh r2 = r12 + r22

M

D

C

B

E

K

F

A

N

P

Q

**Hướng dẫn**

1. Vì góc BED = góc DCF (= góc BAD), suy ra đpcm
2. Tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ (g. g). Suy ra góc BPE = góc BQC nên góc KPQ = góc KQP nên tam giác KPQ cân
3. Tam giác KPQ cân tại K nên phân giác góc K đồng thời là trung tuyến và đường cao của tam giác KPQ. Có nghĩa là MN là đường trung trực của đoạn PQ. Hoàn toàn tương tự PQ là đường trung trực của MN. Từ đó tứ giác MPNQ là hình thoi
4. Ta chứng minh được các tam giác ABC, DBA, DAC đồng dạng. Áp dụng tính chất tỉ số bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng, ta suy ra    đpcm

**Bài 7 (2)** Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến PE và PF. Tia PO cắt đường tròn ở A và B (A nằm giữa P và O). Kẻ EH vuông góc với FB. Gọi I là trung điểm EH. Tia BI cắt (O) tại điểm thứ hai M (M khác B), EF cắt AB tại N. Chứng minh

1. NI // FB
2. Tứ giác MEIN nội tiếp và góc EMN = 900
3. Bốn điểm P, M, N, F cùng thuộc một đường tròn
4. AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEM

B

.

**O**

F

A

I

E

P

N

M

H

**Hướng dẫn:**

1. NI là đường trung bình của tam giác EFH, suy ra đpcm
2. Góc EMI = góc ENI (= góc EFB), suy ra đpcm
3. Góc MFP = góc MBF (1). Mà góc MNP và góc MBF lần lượt phụ với hai góc bằng nhau là góc MNE và góc MIE nên góc MNP = góc MBF (2) . Từ (1) và (2) suy ra đpcm
4. Góc MPN = góc MFE = góc MEP, suy ra đpcm

**Bài 8 (2)** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm của tam giác, M là một điểm trên cung nhỏ BC

1. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác BHCM là hình bình hành
2. Gọi N và E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Chứng minh các tứ giác AHCE và AHBN nội tiếp và ba điểm N, H, E thẳng hàng
3. Xác đinh vị trí của điểm M để độ dài đoạn NE lớn nhất

**Hướng dẫn:**

1. Để tứ giác BHCM là hình bình hành thì BM phải vuông góc với AB. Ngược lại đúng. Vậy M đối xứng với A qua O
2. Giả sử AH cắt BC tại A1, CH cắt AB tại C1. Khi đó góc AHC = góc A1HC1 (1). Còn góc AEC = góc AMC = góc ABC (2). Do tứ giác A1BC1H nội tiếp nên từ (1) và (2) suy ra tứ giác AHCE nội tiếp. Tương tự với tứ giác AHBN. Từ các kết quả trên ta có góc AHE + góc AHN = góc ACE + góc ABN = góc ACM + góc ABM = 1800. Suy ra ba điểm N, H, E thẳng hàng
3. Chứng minh được tam giác ANE cân tai A (vì AN = AM = AE) và góc ở đỉnh NAE = 2. góc BAC (cố định) nên cạnh đáy NE lớn nhất khi và chỉ khi cạnh bên AN lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất khi và chỉ khi M đối xứng với A qua O

**Bài 9 (2)** Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn tâm O đi qua B và C. Qua A vẽ các tiếp tuyến AE, AF với (O). Gọi I là trung điểm BC, N là trung điểm của EF

1. Chứng minh AE2 = AF2 = AB.AC
2. Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) ở E’. Chứng minh EE’ // AB
3. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI chạy trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi

**Hướng dẫn:**

1. Dễ chứng minh
2. Tứ giác AOIF nội tiếp ( vì góc AFO = góc AIO = 900). Nên suy ra góc 2AIF = 2góc AOF = góc EOF = 2góc EE’F. Suy ra EE’ // AB
3. Gọi K là giao điểm của BC và EF. Sử dụng các cặp tam giác đồng dạng sẽ chứng minh được AK.AI = AN.AO = AE2 = AB.AC, mà AI, AB, AC cố định nên AK cố đinh, suy ra điểm K cố định. Từ đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI hay tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONKI chạy trên chạy trên đường trung trực của đoạn KI (cố định)

**Bài 10 (2)** Cho đường tròn tâm O. Từ điểm M bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MC, MD với (O) (C, D là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MAB không đi qua tâm O (A nằm giữa M và B. Tia phân giác của góc ACB cắt AB tại E

1. Chứng minh MC = ME
2. Chứng minh DE là phân giác của góc ADB
3. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn
4. Chứng minh IM là phân giác của góc CID

**Hướng dẫn:**

1. góc MEC = góc EBC + góc BCE = góc ACM + góc ECA = góc ECM. Suy ra đpcm
2. Theo câu a, ta suy ra ME = MD, nên góc MED = góc MDE. Tức là góc MBD + góc BDE = góc MDA + góc ADE (1). Nhưng góc MBD = góc MDA (2). Từ (1) và (2) suy ra góc BDE = góc ADE, suy ra đpcm
3. Dễ chứng minh
4. Theo câu c) tứ giác CIDM nội tiếp, lại chú ý rằng MC = MD, nên suy ra đpcm

**Bài 11 (2)** Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BO cắt BC, BE thứ tự ở H và K. Gọi M là trung điểm của DE

1. Chứng minh năm điểm A, B, O, M, C cùng thuộc một đường tròn
2. Chứng minh góc KDM = góc BCM
3. Chứng minh DH = HK

**Hướng dẫn:**

1. Dễ chứng minh
2. Góc KDM = góc BCM (vì cùng bằng góc BAM)
3. Từ câu b), suy ra tứ giác HDCM nội tiếp. Từ đó góc HMD = góc HCD = góc BED, suy ra HM // BE (1). Lại có DM = ME (2) nên DH = HK

**Bài 12 (2)** Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D và E là đối xứng của M lần lượt qua AB và AC. Vẽ hình bình hành DMEI.

1. Tính góc DME
2. Chứng minh bốn điểm D, A, E, I cùng thuộc một đường tròn
3. Chứng minh AI // BC

**Hướng dẫn:**

1. Dễ tính được góc DME = 1200
2. Tính được góc DAE = 1200 và góc DIE = 1200. Suy ra đpcm
3. Tính được góc IAC = góc IAE + góc EAC = góc IDE + góc EAC = góc DEM + góc KAM = góc HKM + góc KAM = góc HAM + góc KAM = góc BAC = 600 = góc ACB. Suy ra đpcm

**BÀI TẬP HÌNH HỌC LỚP 9**

**CHỦ ĐỀ: BÀI TẬP TỔNG HỢP** - **PS 3**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Chứng minh MN // FE.

b) Vẽ đường cao AD của tam giác ABC. Chứng minh FH là phân giác của góc EFD. Từ đó chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

**Bài 2:** Cho đường tròn (O; R), đường kính AB vuông góc với dây MN tại điểm H (H nằm giữa O và B). Trên tia đối của tian NM lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho đoạn AC cắt (O) tại điểm K khác A. Hai dây MN và BK cắt nhau ở E. Qua N kẻ đường vuông góc với AC cắt MK tại F. Chứng minh:

a) Tứ giác AHEK nội tiếp.

b) Tam giác NFK cân và EM.NC = EN.CM.

c) Giả sử KE = KC, chứng minh OK // MN.

**Bài 3:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn ( M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: AI2 = IM **.** IB.

c) Chứng minh BAF là tam giác cân.

d) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi

**Bài 4:** Cho đường tròn (O), một dây AB và một điểm C ở ngoài tròn nằm trên tia AB. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn , cắt dây AB tại D.Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I.Các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a/ Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được.

b/ Chứng minh: CI.CP = CK.CD

c/ Chứng minh IC là tia phân giác của góc ở ngoài đỉnh I của tam giác AIB

**Bài 5:** Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A,B. Người ta kẻ trên nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By vuông góc với AB và trên tia Ax lấy một điểm I. Tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P. Chứng minh:

a/ tứ giác CPKB nội tiếp được .

b/ AI.BK= AC.CB

c/ tam giác APB vuông

**Bài 6:** Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho AC < BC (CA). Tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) cắt đường trung trực của BC tại D. Gọi F là giao điểm của DO và BC.

a) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (với E A). Chứng minh  DE.DA = DC2 = DF.DO

c) Gọi H là hình chiếu của C trên AB và AD cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

**Bài 7**: Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó ( E khác A và B ). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh MN // AB, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

**Bài 8:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I: các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a/ Góc CID bằng góc CKD.

b/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

c/ IK // AB.

d/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

**Bài 9:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn OA lấy điểm H (H khác A và O), đường thẳng kẻ qua H vuông góc với AO cắt nửa đường tròn tại C. kẻ HE vuông góc với AC tại E, HF vuông góc với BC tại F. Chứng minh rằng:

a) CH = EF

b) Tứ giác AEFB nội tiếp

c) EF vuông góc với OC.

**Bài 10:** Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN. Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B. Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F.

a) Chứng minh rằng MNFE là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là trung điểm của FE. Chứng minh rằng AK vuông góc với MN.

**Bài 11:** Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì ( M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

b) Chứng minh OI.OM = R2; OI. IM = IA2.

c) Chứng minh OAHB là hình thoi.

d) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng

**BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 4**

**CÁC CHỦ ĐỀ**

**\* Hai đường thẳng song song.**

**\* Hai đường thẳng vuông góc, ∆ vuông.**

**\* Hai góc bằng nhau.**

**\* Điểm là trung điểm đoạn thẳng.**

**\* Đường thẳng là phân giác của góc.**

**\* Đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, đường tròn ngoại tiếp ∆**

**\* Ba đường thẳng đồng quy.**

**\* Ba điểm thẳng hàng.**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R) (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF.

**Bài 2:** Cho đường tròn ( O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ( AB < AC, d không đi qua tâm O).

1) Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.

1. Chúng minh AN2 = AB.AC. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4 cm, AN = 6 cm.

3) Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: MT // AC.

**Bài 3:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O (AB < AC). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. E là trung điểm đoạn AD. EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác OEBM nội tiếp. 2) MB2 = MA.MD.

3) . 4) BF // AM

**Bài 4** Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó ( E khác A và B ). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh MN // AB, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

**Bài 5:** Cho tam gíac ABC cân tại A,  < 900, một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB,AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI,MH,MK xuống các cạnh tương ứng BC ,CA, BA. Gọi P là giao điểm của MB,IK và Q là giao điểm của MC,IH.

1) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK,CIMH nội tiếp được

2) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK

3) Chứng minh tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ // BC

**Bài 6:** Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến Am, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C). Gọi H là trung điểm của BC.

1) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn,

2) Chứng minh HA là tia phân giác của .

3) Lấy điểm E trân MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

**Bài 7:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I: các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

1/ Góc CID bằng góc CKD. 2/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

3/ IK // AB. 4/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

**Bài 8:** Cho hình vuông ABCD . Lấy điểm E thuộc cạnh BC , với E không trùng B và E không trùng C . Vẽ EF vuông góc với AE , với F thuộc CD . Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại G . Vẽ đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với AE , đường thẳng a cắt đường thẳng DE tại điểm H .

1/ Chứng minh  .

2/ Chứng minh rằng tứ giác AEGH là tứ giác nội tiếp được đường tròn .

3/ Gọi b là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE tại E , biết b cắt đường trung trực của đoạn thẳng EG tại điểm K . Chứng minh rằng KG là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE .

**Bài 9:** Cho (O;R) đường kính AB =2R và điểm C thuộc đường tròn đó( C khác A,B). D thuộc dây BC (D khác B,C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại E,tia AC cắt BE tại F.

1) Chứng minh tứ giác FCDE nội tiếp

2) Chứngminh DA.DE = DB.DC

3) Chứng minh CFD = OCB . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE , chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

**Bài 10:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O). Trên Ax lấy điểm M sao cho AM > AB, MB cắt (O) tại N (N khác B). Qua trung điểm P của đoạn AM, dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt BM tại Q.

1) Chứng minh tứ giác APQN nội tiếp đường tròn.

2) Gọi C là điểm trên cung lớn NB của đường tròn (O) (C khác N và C khác B).

3) Chứng minh: 

4) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Bài 11**. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB.* Từ *A, B* vẽ các tiếp tuyến *Ax, By* về phía có chứa nửa đường tròn *(O).* Lấy điểm *M* thuộc đoạn thẳng *OA*; điểm *N* thuộc nửa đường tròn *(O)*. Đường tròn *(O’)* ngoại tiếp tam giác *AMN* cắt *Ax* tại *C;* đường thẳng *CN* cắt *By* tại *D.*

1) Chứng minh tứ giác *BMND* nội tiếp.

2) Chứng minh *DM* là tiếp tuyến của đường tròn *(O’).*

3) Gọi *I* là giao điểm của *AN* và *CM; K* là giao điểm của *BN* và *DM*. Chứng minh *IK* // *AB*.

**Bài 12:** Cho đường tròn , từ điểm ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến và(là các tiếp điểm). cắttại E.

1) Chứng minh tứ giác  nội tiếp.

2) Chứng minh  vuông góc với  và .

3) Gọilà trung điểm của , đường thẳng quavà vuông góc cắt các tia theo thứ tự tại và . Chứng minh  và cân tại .

4) Chứng minh  là trung điểm của.

**Bài 13:** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M ( M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB (), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp.

2) AM2 = MK.MB

3) Góc KAC bằng góc OMB

4) N là trung điểm của CH.

**Bài 14:** Cho đường tròn (O;R)đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và C ), BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1) Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh  =  .

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

**Bài 15:**Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, gọi BC và OS cắt nhau tại M

1) Chứng minh AB. MB = AE.BS 2) ∆AEM và ∆ABS đồng dạng

3) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh NP vuông góc với BC.

**Bài 16***:* Cho đường tròn (O), dây cung BC (BC không là đường kính). Điểm A di động trên cung nhỏ BC (A khác B và C; độ dài đoạn AB khác AC). Kẻ đường kính AA’ của đường tròn (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA’. Chứng minh rằng:

1) Bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn. 2) BD.AC = AD.A’C.

3) DE vuông góc với AC.

**Bài 17:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AH và BK lần lượt là các đường cao của tam giác ABC.

1) Chứng minh tứ giác AKHB nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này

2) Gọi (d) là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng 

3) Chứng minh .

**Bài 18:** Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ (MP < MQ). Gọi I là trung điểm của dây PQ, E là giao điểm thứ 2 giữa đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh:

1/ Tứ giác BOIM nội tiếp. 2/ BOM = BEA

3/ AE // PQ 4/ Ba điểm O; I; K thẳng hàng (K là trung điểm của EA)

**Bài 19:** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại I. Dây MN cắt cạnh AB, BC lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh NB2 = NK.NM

3) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

4) Gọi P, Q lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh 3 điểm D, E, K thẳng hàng?

**Bài 20:** Cho đường tròn (O) có tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME<MF). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

1) Chứng minh rằng MA.MB = ME.MF

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

3) Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.

4) Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

**Bài 21:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy B làm tâm vẽ đường tròn tâm B bán kính AB.Lấy C làm tâm vẽ đường tròn tâm C bán kính AC, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là D.Vẽ AM, AN lần lượt là các dây cung của đường tròn (B) và (C) sao cho AM vuông góc với AN và D nằm giữa M; N.

1) CMR: ΔABC=ΔDBC 2) CMR: ABDC là tứ giác nội tiếp.

3) CMR: ba điểm M, D, N thẳng hàng

**Bài 22:**Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC,B ∈ (O),C∈(O’). Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

1. Chứng minh tứ giác CO’OB là một hình thang vuông.
2. Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

3) Từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O’) (E là tiếp điểm). Chứng minh rằng DB = DE.

**Bài 23:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M tùy ý giữa A và B. Đường tròn đường kính BM cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng CM, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điêmt thứ 2 là H và K. Chứng minh

1/ Tứ giác AMEC là tứ giác nội tiếp. 2/ góc ACM bằng góc KHM.

3/ Các đường thẳng BH, EM và AC đồng quy.

**Bài 24:** Cho tam giác ABC(AB > AC ;  > 900). I, K thứ tự là các trung điểm của AB,AC. Các đường tròn đường kính AB,AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh bai điểm B,C,D thẳng hàng 2) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.

3) Chứng minh ba đường thẳng AD,BF,CE đồng quy

**Bài 25:** Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đI qua tâm O ( C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Chứng minh.

1) Tứ giác MAOB nội tiếp. 2) MC.MD = MA2

3) OH.OM + MC.MD = MO2 4) CI là tia phân giác góc MCH.

**Bài 26:** Cho đường tròn (O). Đường thẳng (d) không đi qua tâm (O) cắt đường tròn tại hai điểm A và B theo thứ tự, C là điểm thuộc (d) ở ngoài đường tròn (O). Vẽ đường kính PQ vuông góc với dây AB tại D ( P thuộc cung lớn AB), Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I, AB cắt IQ tại K.

1) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp đường tròn. 2) Chứng minh CI.CP = CK.CD

3) Chứng minh IC là phân giác của góc ngoài ở đỉnh I của tam giác AIB.

**Bài 27:** Cho đường tròn (O) và một điểm A và OA = 3R. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp. 2) Chứng minh KA2 = KN.KP

3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc.

**Bài 28:** Cho đường tròn ( O) bán kính R = 3 cm và một điểm I nằm ngoài đường tròn, biết rằng OI = 4cm.Từ I kẻ hai tiếp tuyến IA và IB với đường tròn (A,B là tiếp điểm).

1) Chứng minh tứ giác OAIB nội tiếp.

2) Từ I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt tia OA tại O’. Tính OO’ và S ∆IOO’ .

3) Từ O’ kẻ O’C vuông góc BI cắt đường thẳng BI tại C. Chứng minh O’I là tia phân giác của 

**CHỦ ĐỀ: ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG TRÊN ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH**

**Bài 1:** Cho (O; R) và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Qua A kẻ một cát tuyến d cắt đường tròn tại 2 điểm B và C (B nằm giữa A và C). Tiếp tuyến AM, AN tiếp xúc với đường tròn (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các điểm A, M, O , I , N cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là giao điểm của OA và MN. Chứng minh OA  MN và AH.AO = AB.AC .

c) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AM, AN lần lượt tại E và F. Tính chu vi tam giác AEF theo R.

d) Khi cát tuyến d quay quanh A thì trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên đường nào?

**Bài 2:** Cho (O; R) và dây AB cố định. C là điểm chính giữa của cung AB, từ C kẻ đường kính CD. N là một điểm bất kì trên cung nhỏ AD. CN cắt AB tại M.

a) Chứng minh AM.MB = CM.CN.

b) CD cắt AB tại I. Chứng minh tứ giác MNDI nội tiếp.

c) Gọi S là giao điểm của AB với DN. Chứng minh AM.SB = SA.BM

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABN khi N chuyển động trên cung nhỏ AD.

**Bài 3:** Cho (O; R) và dây AB cố định (AB < 2R) và một điểm M tùy ý trên cung lớn AB (M khác A và B). Gọi I là trung điểm của dây AB và (O’) là đương tròn qua M và tiếp xúc với AB tại A. Đường thẳng MI cắt (O), (O’) lần lượt tại các điểm thứ hai là N và P.

a) Chứng minh IA2 = IP.IM

b) Chứng minh tứ giác ANBP là hình bình hành.

c) Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBP

d) Chứng minh khi M di chuyển thì trọng tâm G của tam giác PAB chạy trên một cung tròn cố định.

**Bài 4:** Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D, tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N, tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P.

a) Chứng minh tứ giác ABMD nội tiếp.

b) Chứng minh tích CM.CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tứ giác APND là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của ∆MAC chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

**Bài 5:** Cho (O; R) và (O ; R’) (R > R’) tiếp xúc ngoài tại A và một dây cung AB cố định của (O). Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại M và cắt (O’) tại N. Đường thẳng qua N và song song với AB cắt MB tại Q và cắt (O’) tại điểm thứ hai P.

a) Chứng minh OM // O’N

b) Chứng minh 

c) Tứ giác ABQP là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của ∆MAB chạy trên một đường tròn cố định.

**Bài 6:** Cho (O; R) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại H. Điểm M di động trên đoạn CD, tia AM cắt (O) tại N. Chứng minh:

a) Tứ giác MNBH nội tiếp.

b) MC.MD = MA.MN và tích AM.AN không đổi.

c) AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ∆CMN.

d) Khi M di động trên đoạn CD, trọng tâm G của ∆CAN chạy trên đường tròn xác định.

**Bài 7:** Cho điểm M cố định nằm ngoài (O; R). Qua M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm bất kì trên cung nhỏ AB của (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MA, MB.

a) Chứng minh A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) AC cắt DE tại P; BC cắt DF tại Q. Chứng minh ∆PAE đông dạng với ∆PDC. Từ đó suy ra PA.PC = PD.PE.

c) Chứng minh AB // PQ

d) Khi C di động trên cung nhỏ AB của (O) thì trọng tâm G của ∆ABC di chuyển trên đường nào?

**Bài 8:** Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Gọi N và P lần lượt là điểm chính giữa của cung AM và cung MB.

a) Chứng minh ∆ONP vuông cân và suy ra dây NP có độ dài không đổi.

b) Tính diện tích hình viên phân tạp thành bởi dây NP và cung nhỏ NP.

c) Gọi các giao điểm của: AP và BN là E; tia AN và tia BP là C; tia CE và AB là D. Chứng minh các tứ giác CNEP và DONP nội tiếp.

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của ∆ABC khi M chạy trên nửa đường tròn (O)?

**Bài 9:** Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba lần lượt cắt Ax, By tại C và D.

a) Chứng minh CD = AC + BD; góc COD bằng 90o.

b) Chứng minh AC.BD = R2.

c) Biết OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F. Chứng minh EF = R.

d) Khi M chạy trên đường tròn đường kính AB thì trọng tâm G của ∆OEF chạy trên đường nào?

**Bài 10:** Cho (O) trên đó có điểm A cố định. Kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A. Lấy ddiemr M trên tia Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. Gọi I là trung điểm của MA và K là gia điểm thứ hai của BI với (O). Tia MK cắt (O) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh ∆MIK đồng dạng với ∆BIM.

b) Chứng minh BC // MA.

c) Có vị trí nào của M để tứ giác AMBC là hình bình hành không? Tại sao?

d) Chứng minh M di động trên tia Ax thì trực tâm H của ∆MAB chạy trên một đường tròn cố định.

**Bài 11:** Cho (O) đường kính AB cố định. Hai tia Ax và Ay thay đổi cắt đường tròn (O) tại M và N sao cho góc xAy bằng 45o. BM cắt Ay tại E, BN cắt Ax tại F.

a) Chứng minh tứ giác MNEF nội tiếp.

b) Tính độ dài MN theo R

c) Chứng minh EF luôn song song với một đường thẳng cố định và có độ dài không đổi.

c) Khi góc xAy quay quanh A, hãy chứng minh trung điểm của EF thuộc một đường tròn cố định.

**Bài 12:** Cho hai đường tròn (O ; R) và (O1 ; R1) cắt nhau tại A và B, đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB cắt (O) , (O1) lần lượt tại C và D. Gọi E là một điểm thuộc cung nhỏ BC của (O), đường thẳng BE cắt (O1) tại điểm thứ hai là F. Hai đường thẳng CE và DF cắt nhau tại M. Gọi N là giao điểm của AM và (O1).

a) Chứng minh tứ giác ACMD nội tiếp.

b) Chứng minh BN // CM

c) Gọi K là điểm đối xứng của D qua F. Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ BC của (O).

**BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 6**

**CHỦ ĐỀ: TÌM VỊ TRÍ ĐIỂM ĐỂ TAM GIÁC, TỨ GIÁC**

**CÓ DIỆN TÍCH (CHU VI) ĐẠT Max hoặc Min**

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn (O ; R) và hai đường kính MN và PQ vuông góc với nhau. Lấy điểm A trên cung nhỏ PN, PA cắt MN tại B, AQ cắt MN tại E

1) Chứng minh tứ giác OABQ là tứ giác nội tiếp

2) Nối AM cắt PQ và PN lần lượt tại C và I. Chứng minh rằng: MC . MA không đổi khi A di chuyển trên cung nhỏ PN.

3) Chứng minh : 

4) Tìm vị trí của điểm A để diên tích tam giác ACE đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác BFEC là tứ giác nội tiếp;

2) Chứng minh AF.AB = AE.AC.

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N. Chứng minh EF // MN.

4) Giả sử B,C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

**Bài 3.** Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại điểm H nằm giữa hai điểm A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ; BF cắt CD tại E; AF cắt tia DC tại I.

1) Chứng minh rằng: Tứ giác AHEF là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HE.HI

3) Đường tròn ngoại tiếp  cắt AE tại điểm thức hai M. Chứng minh: M thuộc (O;R)

4) Tìm vị trí của H trên OA để  có chu vi lớn nhất.

**Bài 4.** Cho đường tròn (O; R). Một đường thẳng d không qua O cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A và B. Trên đường thẳng d lấy điểm C sao cho CA < CB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng qua O vuông góc với AB tại H cắt CN tại K

1) Chứng minh O, C, H, N cùng thuộc một đường tron.

2) Chứng minh KN.KC = KO.KH

3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nột tiếp ∆CMN.

4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

**Bài 5:** Cho đường tròn tâm O bán kính R , dây BC cố định . Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Gọi I Là trung điểm của BC , hạ CH vuông góc với AE tại H . Đường thẳng BE cắt CH tại M

a) Chứng minh rằng : A , I , H , C cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh: AD.AE = AB2

c) Cho BC = R. Tính AC

d) Tìm vị trí điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất

**Bài 6:** Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC thuộc đường tròn sao cho BC < 2R. Điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi AD, BE, CF là 3 đường cao của tam giác ABC, H là trực tâm.

a) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn, tìm tâm I của đường tròn đó

b) Chứng minh tiếp tuyến tại E của đường tròn I luôn đi qua 1 điểm cố định

c) Tìm vị trí của A để tam giác AEF có diện tích lớn nhất

**Bài 7:** Cho (O;R) và dây BC cố định không đi qua O. Từ A thuộc tia đối của tia BC vẽ các tiếp tuyến AM,AN với (O) (M, N là tiếp điểm,M thuộc cung nhỏ BC). Gọi I là trung điểm của BC,MI cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Gọi giao của MN với OI là K. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác ONK lớn nhất

**Bài 8:** Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với nửa đgờng tròn Ax, By lần lượt ở C, D.

a) Chứng minh AC.BD = R^2

b) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB

c) Chứng minh MN song song với AC

d) Tìm vị trí của M trên nửa đgờng tròn (O) để tứ giác ABDC có chu vi nhỏ nhất

**Bài 10:** Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ AH BC. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O1; O2 cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết R = 25 và BH = 10

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO2O1 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

**Bài 11:**Cho đường tròn (O), đường kính AB, d1, d2 là các các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. M, N là các điểm lần lượt thuộc d1, d2 sao cho  = 900.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh AM . AN = .

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 12:** Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M và N. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

**Bài 13**: Cho AB là đường kính của đường tròn (O;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC,OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại M,MB cắt CH tại K. Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt GTLN? Tìm GTLN đó theo R

**Bài 14:** Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. M là một điểm thuộc đường thẳng d . Qua M kẻ tiếp tuyến MA,MB với đường tròn. Hạ OH vuông góc với d tại H. Nối AB cắt OM tại I, OH tại K. Tia OM cắt đường tròn (O;R) tại E

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB

b) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có diên tích lớn nhất

**Bài 15:** Cho đường tròn (O;R) đường kính CD = 2R. M là 1 điểm thay đổi trên OC . Vẽ đường tròn (O') đường kính MD. Gọi I là trung điểm của MC,đường thẳng qua I vuông góc với CD cắt (O) tại E,F. đường thẳng ED cắt (O') tại P

a) Chứng minh 3 điểm P, M, F thẳng hàng

b) Chứng minh IP là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)

c) Tìm vị trí của M trên OC để diện tích tam giác IPO lớn nhất

**BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 7**

**CHỦ ĐỀ: CHỨNG MINH ĐƯỜNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.**

**ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN CỐ ĐỊNH.**

**Bài IV 1.** (Thi Thử - THCS Khương Thượng 2015 – 2016)

Cho nửa đường tròn O đường kính AB = 2R. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB. Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC, kẻ  tại H. Tia AC cắt HK tại I, tia BC cắt HK tại E, AE cắt đường tròn (O) tại F.

a) Chứng minh tứ giác BHFE nội tiếp;

b) Chứng minh BI . BF = BC . BE;

c) Giả sử H là trung điểm của OA. Tính diện tích tam giác FEC theo R;

d) Chứng minh rằng khi K di chuyển trên cung nhỏ AC thì đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài IV 2.** (KSCL - L5 - THCS Phương Liệt 2017 – 2018)

Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp điểm AB và AC với đường tròn ấy (B,C là hai tiếp điểm ). Điểm M thuộc cùng nhỏ BC ( và ). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc với M trên CB, BA, AC. Biết MB cắt IH tại E, MC cắt IK tại F.

1) Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh  và 

3) Chứng minh 

4) Đường tròn ngoại tiếp  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt nhau tại điểm thứ hai là N. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC ( và ) thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài IV 3.** (KSCL - THCS Yên Hòa 2017 – 2018)

Cho đường tròn (O;R) có dây CD cố định và H là trung điểm của CD. Gọi S là một điểm bất kì trên tia đối của tia DC. Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB tới đường tròn tâm O (với A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng AB cắt SO tại E.

1) Chứng minh bốn điểm O, H, A, S cùng thuộc một đường tròn;

2) Chứng minh ;

3) Cho R = 10cm; SD = 4cm; OH = 6cm. Tính CD và SA;

4) Chứng minh rằng khi D di động trên tia đối của tia DC thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài IV 4.**(Thi Thử - L4 – **VINSCHOOL 2017 – 2018)**

Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB; điểm I nằm giữa A và O; dây CD vuông góc với AB tại I; điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B,C). Dây AM cắt CD tại K.

1) Chứng minh tứ giác IKMB nội tiếp.

a) Chứng minh 

b) Nếu cho R = 6cm và I là trung điểm AO. Tính DI, từ đó tính thể tích của hình tạo thành khi tam giác ADI quay quanh trục DI.

2) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CKM.

3) Trên tia đối của MC lấy điểm E sao cho ME = MB. Chứng minh rằng: khi các điểm A, B, I cố định và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC (M khác B,C) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE luôn đi qua một điểm cố định khác C và B.

**Bài 5:**(Thi Thử L3 – TTBDVH EduFly – 2017 -2018)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB, trên tia AB lấy 1 điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại A. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I, các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được

b) Chứng minh CI. CP = CK. CD. Chứng minh hai tam giác QAI và BKI đồng dạng

c) Chứng minh IC là phân giác ngoài góc I của tam giác AIB

d) Cho A,B,C cố định. Chứng minh rằng khi (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 6.** (KSCL - L5 - THCS Vĩnh Tuy 2015 – 2016)

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ ND vuông góc AC. Gọi E là trung điểm BC. Dụng hình bình hành ADEF.

1) Tính góc MIC

2) Chứng minh F thuộc đường tròn (O; R)

3) Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

4) Khi C chuyển động trên đường tròn (O; R) chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

**Bài 7: (**Kiểm Tra kì 2 – Quận Hoàng Mai 2016 – 2017)

Cho nửa (O), đường kính AB. Lấy hai điểm C, M bất kì thuộc nửa đường tròn sao cho AC = CM (AC và CM khác MB). Gọi D là giao điểm của AC và BM; H là gia điểm của AM và BC.

1) Chứng minh tứ giác CHMD nội tiếp.

2) Chứng minh DA.DC = DB.DM

3) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tia BC tại K. Chứng minh AK + HD = 2KD

4) Gọi Q là giao điểm của DH và AB. Chứng minh khi C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho AC = AM thì đường tròn ngoại tiếp ∆CMQ luôn đi qua một đểm cố định.