MỘT SỐ BÀI HÌNH ÔN THI VÀO LỚP 10

Bài IV 2012 - 2013

Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB, M* là điểm bất kì trên cung nhỏ *AC* (*M* khác *A* và *C*), *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.

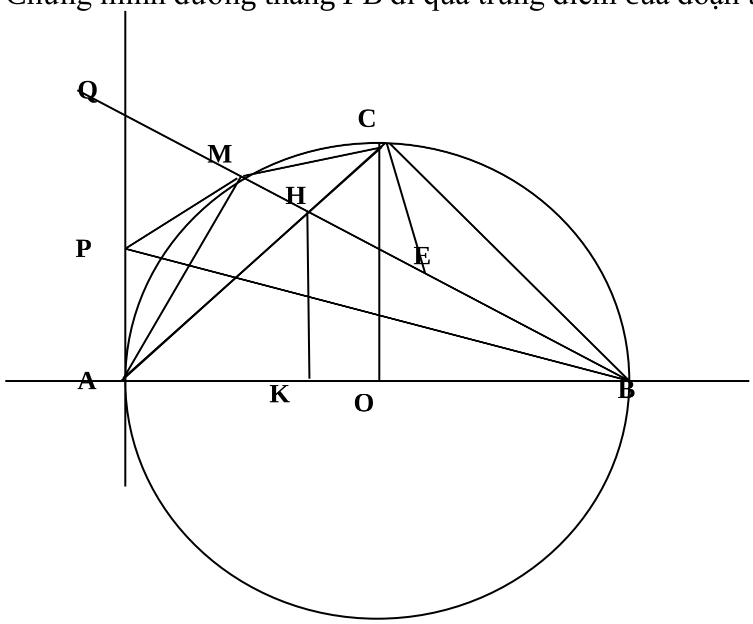
1. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $ACM = ACK$

3. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.

4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên *d* sao cho hai điểm *P*, *C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$.

Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.



1) Tứ giác CBKH có hai góc đối $HCB = HKB = 90^0$
khẳng định tứ giác CBKH nội tiếp trong đường tròn đường kính HB.

2) Góc $ACM = ABM$ chắn cung AM

và $ACK = HCK = HBK$ vì cùng chắn cung HK.

Vậy $ACM = ACK$

3) Xét 2 tam giác MAC và EBC có hai cặp cạnh EB = MA, AC = CB và góc giữa MAC = MBC vì cùng chắn cung

MC nên 2 tam giác đó bằng nhau.

ta có CM = CE và $CMB = 45^0$ vì chắn cung $CB = 90^0$.
Vậy tam giác MCE vuông cân tại C.

4) Xét 2 tam giác PAM và OBM

Theo giả thuyết ta có $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Leftrightarrow \dfrac{AP}{MA} = \dfrac{OB}{MB}$. Mặt khác ta có $PAM = ABM$ vì cùng chắn cung AM vậy 2 tam giác trên đồng dạng.

Vì tam giác OBM cân tại O nên tam giác PAM cũng cân tại P.

Vậy PA = PM.

Kéo dài BM cắt d tại Q. Xét tam giác vuông AMQ có PA = PM
nên PA = PQ vậy P là trung điểm của AQ nên BP cũng đi qua trung điểm của HK, do định lí Thales (vì HK//AQ).

Bài IV: 2013 - 2014

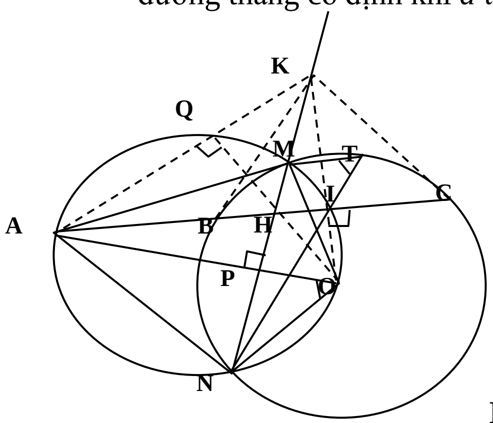
Cho đường tròn (O) và điểm *A* nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến *AM, AN* với đường tròn (O) (*M, N* là các tiếp điểm). Một đường thẳng *d* đi qua *A* cắt đường tròn (O) tại hai điểm *B* và *C* (*AB* < *AC*, *d* không đi qua tâm *O*).

1) Chứng minh tứ giác *AMON* nội tiếp.

2) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng *BC* khi $AB = 4\ cm,\ AN = 6\ cm.$

3) Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Đường thẳng *NI* cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai *T*. Chứng minh $MT\ //\ AC$.

4) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại *B* và *C* cắt nhau ở *K*. Chứng minh *K* thuộc một đường thẳng cố định khi *d* thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.



Bài IV *(3,5 điểm)*

1/ Xét tứ giác AMON có hai góc đối $ANO = 90^0$
$AMO = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp

2/ Hai tam giác ABM và AMC đồng dạng
nên ta có AB. AC = AM^2 = AN^2 = 6^2 = 36

$$\Rightarrow AC = \frac{6^2}{AB} = \frac{6^2}{4} = 9\,(cm)$$

$$\Rightarrow BC = AC - AB = 9 - 4 = 5(cm)$$

3/ $MTN = \frac{1}{2}MON = AON$ (cùng chắn cung MN trong đường tròn (O)), và $AIN = AON$
(do 3 điểm N, I, M cùng nằm trên đường tròn đường kính AO và cùng chắn cung 90^0)

Vậy $AIN = MTI = TIC$ nên MT // AC do có hai góc so le bằng nhau.

4/ Xét ΔAKO có AI vuông góc với KO. Hạ OQ vuông góc với AK. Gọi H là giao điểm của OQ và AI thì H là trực tâm của ΔAKO, nên KMH vuông góc với AO. Vì MHN vuông góc với AO nên đường thẳng KMHN vuông góc với AO, nên KM vuông góc với AO. Vậy K nằm trên đường thẳng cố định MN khi BC di chuyển.

<u>Cách giải khác:</u>

Ta có KB^2 = KC^2 = KI.KO. Nên K nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm O và đường tròn đường kính AO. Vậy K nằm trên đường thẳng MN là trục đẳng phương của 2 đường tròn trên.

Bài IV (3,5 điểm) 2014 - 2015

Cho đường tròn $(O;\ R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính *MN* của đường tròn $(O;\ R)$ (*M* khác *A*, *M* khác *B*). Tiếp tuyến của đường tròn $(O;\ R)$ tại *B* cắt các đường thẳng *AM*, *AN* lần lượt tại các điểm *Q*, *P*.

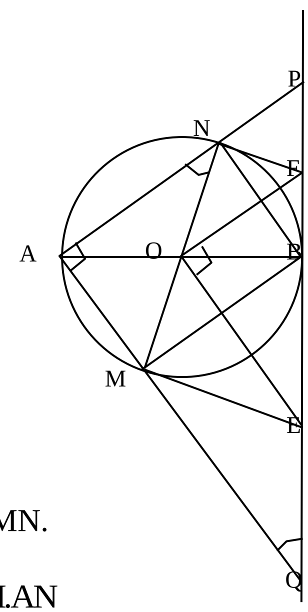
1) Chứng minh tứ giác *AMBN* là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm *M*, *N*, *P*, *Q* cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi *E* là trung điểm của *BQ*. Đường thẳng vuông góc với *OE* tại *O* cắt *PQ* tại điểm *F*. Chứng minh *F* là trung điểm của *BP* và $ME\ //\ NF$.

4) Khi đường kính *MN* quay quanh tâm *O* và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính *MN* để tứ giác *MNPQ* có diện tích nhỏ nhất.

Bài IV ***(3,5 điểm)***



1) Tứ giác AMBN có 4 góc vuông, vì là 4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

2) Ta có $ANM = ABM$ (cùng chắn cung AM)

và $ABM = AQB$ (góc có cạnh thẳng góc)

vậy $ANM = AQB$ nên MNPQ nối tiếp.

3) OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

OF // AP nên OF là đường trung bình của tam giác ABP

Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét 2 tam giác NOF = OFB (c-c-c) nên $ONF = 90^0$.

Tương tự ta có $OME = 90^0$ nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN.

4)

$2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN = 2R.(PB + BQ) - AM.AN$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra $\dfrac{AB}{QB} = \dfrac{BP}{BA} \Rightarrow\ AB^2 = BP.QB$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có $PB + BQ \ge 2\sqrt{PB.BQ} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có $AM.AN \le \dfrac{AM^2 + AN^2}{2} = \dfrac{MN^2}{2} = 2R^2$

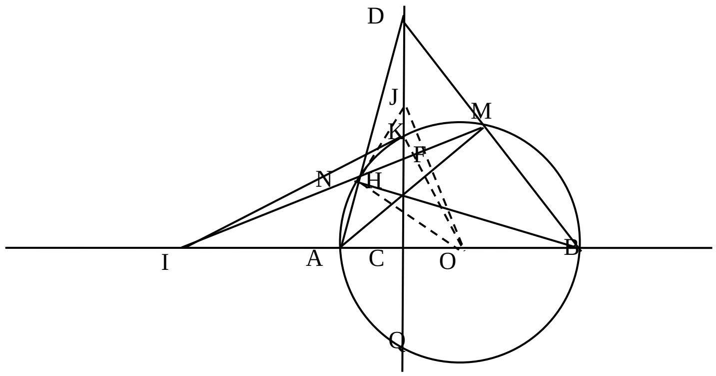
Do đó, $2S_{MNPQ} \ge 2R.4R - 2R^2 = 6R^2$. Suy ra $S_{MNPQ} \ge 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi AM =AN và PQ = BP hay MN vuông góc AB.

Bài IV (3,5 điểm) 2015 - 2016

Cho nửa đường tròn tâm *O* có đường kính *AB*. Lấy điểm *C* trên đoạn thẳng *AO* (*C* khác *A*, *C* khác *O*). Đường thẳng đi qua *C* và vuông góc với *AB* cắt nửa đường tròn tại *K*. Gọi *M* là điểm bất kì trên cung *KB* (*M* khác *K*, *M* khác *B*). Đường thẳng *CK* cắt các đường thẳng *AM*, *BM* lần lượt tại *H* và *D*. Đường thẳng *BH* cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai *N*.

1) Chứng minh tứ giác *ACMD* là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh *CA.CB=CH.CD*.
3) Chứng minh ba điểm *A*, *N*, *D* thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của *DH*.
4) Khi *M* di động trên cung *KB*, chứng minh đường thẳng *MN* luôn đi qua một điểm cố định.



Bài IV ***(3,5 điểm)***

1) Tứ giác ACMD có $ACD = AMD = 90^0$ Nên tứ giác ACMD nội tiếp
2) Xét 2 tam giác vuông : ΔACH và ΔDCB đồng dạng

(Do có $CDB = MAB$ (góc có cạnh thẳng góc))

Nên ta có $\dfrac{CA}{CH} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD$

3) Do H là trực tâm của ΔABD
Vì có 2 chiều cao DC và AM giao nhau tại H , nên AD $\perp$ BN

Hơn nữa $ANB = 90^0$ vì chắn nửa đường tròn đường kính AB.
Nên A, N, D thẳng hàng.

Gọi tiếp tuyến tại N cắt CD tại J ta chứng minh $JND = NDJ$.

Ta có $JND = NBA$ cùng chắn cung AN .

Ta có $NDJ = NBA$ góc có cạnh thẳng góc

$\Rightarrow JND = NDJ$ Vậy trong tam giác vuông ΔDNH J là trung điểm của HD.
4) Gọi I là giao điểm của MN với AB. CK cắt đường tròn tâm O tại điểm Q.
Khi đó JM, JN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.
Gọi F là giao điểm của MN và JO. Ta có KFOQ là tứ giác nội tiếp.

⇨ FI là phân giác KFQ.

Ta có $KFQ = KOQ \Rightarrow KFI = FOI$

$\Rightarrow$ tứ giác KFOI nội tiếp

$\Rightarrow IKO = 90^0 \Rightarrow$ IK là tiếp tuyến đường tròn tâm O
Vậy MN đi qua điểm cố định I (với IK là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

Cách 2 : NC cắt đường tròn tại R ta có CK là phân giác của NCM

$\Rightarrow$ MR // CK .Vậy B là trung điểm MR . Ta có $CNM = \dfrac{1}{2}$ số đo $MR = MOB$.

$\Rightarrow$ Tứ giác NCOM nội tiếp.
Vậy IM.IN = IA.IB = IC.IO = hằng số
Vậy I là điểm cố định mà MN đi qua.

Bài IV (3,5 điểm) 2016 - 2017

Cho đường tròn (O) và một điểm *A* nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến *AB* với đường tròn (O) (*B* là tiếp điểm) và đường kính *BC*. Trên đoạn thẳng *CO* lấy điểm *I* (*I* khác *C*, *I* khác *O*). Đường thẳng *AI* cắt (O) tại hai điểm *D* và *E* (*D* nằm giữa *A* và *E*). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng *DE*.

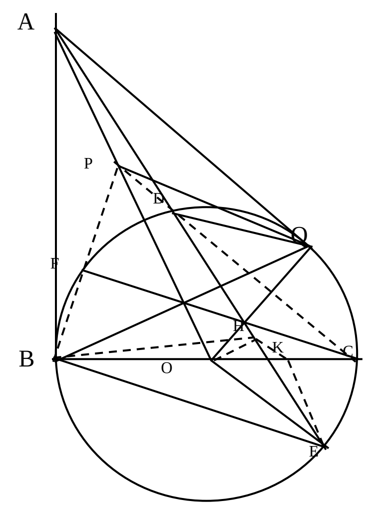
1) Chứng minh bốn điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

3) Đường thẳng *d* đi qua điểm *E* song song với *AO*, *d* cắt *BC* tại điểm *A*. Chứng minh $HK//DC$.

4) Tia *CD* cắt *AO* tại điểm *P*, tia *EO* cắt *BP* tại điểm *F*. Chứng minh tứ giác *BECF* là hình chữ nhật.

Bài IV ***(3,5 điểm)***



1) Tứ giác ABOH có 2 góc đối vuông nêu nội tiếp trong đường tròn đường kính AO.

2) Xét 2 tam giác ADB và ABE.

Ta có $ABD = BED$ (cùng chắn cung BD và góc A chung)

$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{DB}{BE}$

3)Tứ giác ABOH nội tiếp nên ta có:

$OAH = OBH$

Ta có $HAO = HEK$ (Vì EK//AO)

$\Rightarrow HBK = HEK$.

Vậy tứ giác HKEB nội tiếp $\Rightarrow HKB = DEB = DCB$ (cùng chắn DB)

Nên HK//DC do 2 góc đồng vị bằng nhau.

4) Kẻ thêm AQ là tiếp tuyến thứ 2 với vòng tròn O.

Ta có tứ giác APDQ nội tiếp vì $QDC = OAB = PAB = QBC$

Do tứ giác APDQ nội tiếp nên ta có $AQP = ADP = EDC = EBC$

Vì đối xứng nên ta có $ABP = AQP$

$\Rightarrow ABP = CBE$.

$\Rightarrow BF \perp BE$.

Vậy tứ giác BFCE là hình chữ nhật.

Bài IV *(3,5 điểm) – Đề vào 10 HN năm học 2017 - 2018*

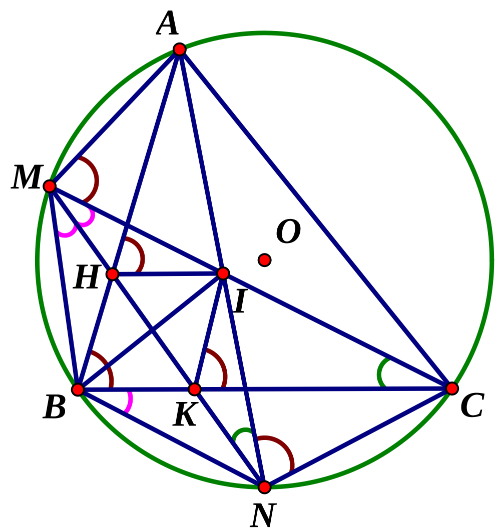
Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1) Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.

3) Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

4) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của *đường tròn* (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.



Hướng dẫn giải

1) Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

Ta có M là điểm chính giữa cung AB $\Rightarrow AM = BM$ $\Rightarrow MNA = MCB$

$\Rightarrow KNI = ICK$. Tứ giác $CNKI$ có C và N là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

Do đó bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.

Ta có N là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow BN = CN$ $\Rightarrow BMN = CMN$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Mà $CBN = CMN$ (góc nội tiếp chắn cùng chắn cung CN)

$CBN = BMN$ (cùng bằng góc CMN) $\Rightarrow KBN = BMN$

Xét ΔKBN và ΔBMN có :

N chung

$KBN = BMN$

$\Rightarrow \Delta KBN \backsim \Delta BMN \Rightarrow \dfrac{KN}{BN} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (điều phải chứng minh).

3) Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Ta có $ABC = ANC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Mà $AMC = AHI$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IC)

$\Rightarrow ABC = IKC$ Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $HB // IK$ (1)

+ Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

$ANC = IKC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

Ta có $ABC = AMC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

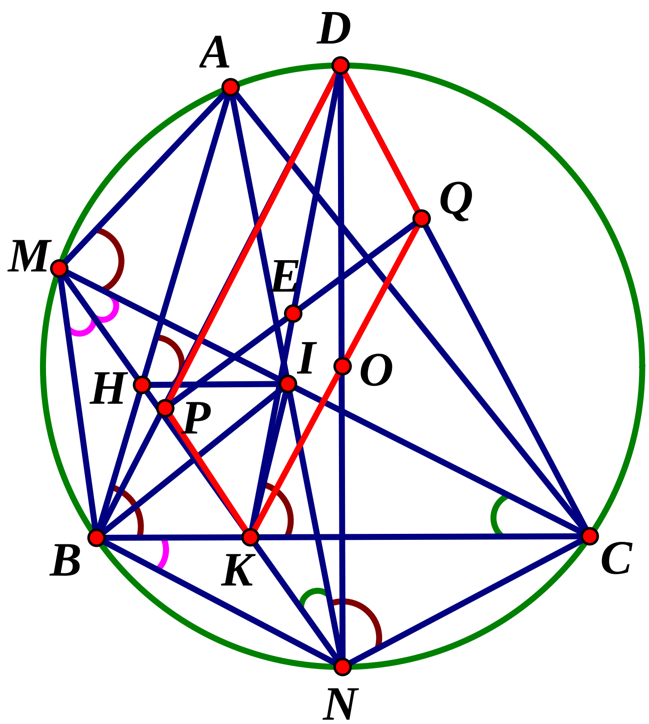
$\Rightarrow ABC = AHI$ Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $BK // HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm 3 đường phân giác, do đó BI là tia phân giác góc B

Vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

4) Gọi P,Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của *đường tròn* (O). Chứng minh ba điểm D,E,K thẳng hàng.



Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên DN là trung trực của BC $\Rightarrow DN$ là phân giác BDC.

Ta có $KQC = 2KMC$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm trong đường tròn (Q))

$NDC = KMC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NC)

Mà $BDC = 2NDC \Rightarrow KQC = BDC$

Xét tam giác ΔBDC và ΔKQC là các các tam giác cân tại D và Q có hai góc $BCD = BCQ$ do vậy D,Q,C thẳng hàng nên $KQ//PD$

Chứng minh tương tự ta có ta có D,P,B thẳng hàng và $DQ//PK$

Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK. Vậy D,E,K thẳng hàng (điều phải chứng minh).

Câu 4. ***(3,5 điểm) – 2018 - 2019***

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, CD với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

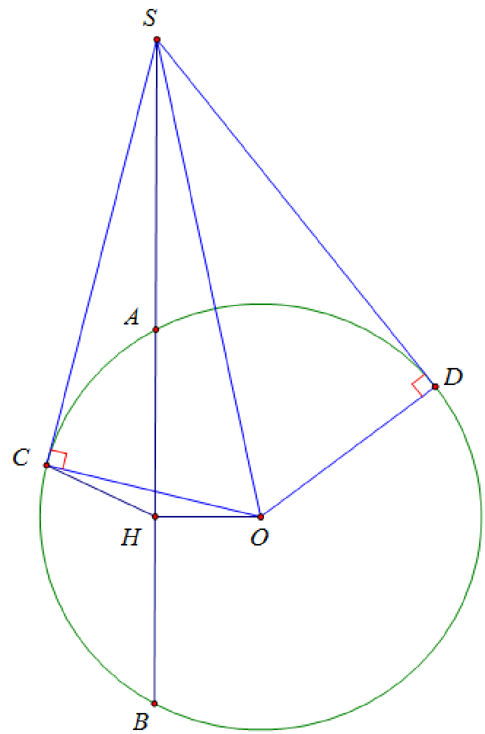
1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo góc SCD.

3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng $SC,$ cắt đoạn thẳng CD tại $K.$ Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng $SC.$

4. Gọi E là trung điểm của đường thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng $AD.$ Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



1) Chứng minh năm điểm $C,\ D,\ H,\ O,\ S$ thuộc đường tròn đường kính $SO.$

* Xét đường tròn $(O;R)$ có:

- $SC\perp\ OC$ (SC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R) \Rightarrow SCO = 90^0$

- $SD\perp\ OD$ (SD là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R) \Rightarrow SDO = 90^0$

- H là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Rightarrow OH\perp\ AB$ (Tính chất đường kính đi qua trung điểm của dây cung) $\Rightarrow SHO = 90^0$

* Xét tứ giác $SCOD$ có:

- $SCO + SDO = 180^0$ (cmt)

- SCO và SDO là hai góc đối nhau

$\Rightarrow SCOD$ là tứ giác nội tiếp

Có ΔSCO và ΔSDO vuông tại C và D, có SO là cạnh huyền chung

$\Rightarrow$ tứ giác $SCOD$ thuộc đường tròn đường kính $SO.$ (1)

* Xét tứ giác $SCHO$ có:

- $SCO = SHO = 90^0$

- Mà hai đỉnh S và H kề nhau cùng nhìn cạnh SO dưới một góc bằng nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $SCHO$ thuộc đường tròn đường kính SO. (2)

Từ $(1),(2)$ $\Rightarrow$ năm điểm $C,\ D,\ H,\ O,\ S$ thuộc đường tròn đường kính SO.

2) Khi $SO = 2R,$ hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo góc SCD.

Xét ΔSDO vuông tại D:

Có: $SO^2 = SD^2 + OD^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - OD^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow SD = \sqrt{3}R$

Ta lại có: $\tan OSD = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{R}{\sqrt{3}R} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow OSD = 30^0$

Chứng minh tương tự ta có: $SD = R\sqrt{3};\ OSC = 30^0$.

Xét ΔSCD có:

$SC = SD \Rightarrow \Delta SCD$ cân

Mà $CSD = OCS + ODS = 60^0 \Rightarrow \Delta SCD$ đều $\Rightarrow SCD = 60^0$.

3. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.

- Có tứ giác $DOHC$ là tứ giác nội tiếp (Cmt)

$\Rightarrow KDH = COH = \dfrac{1}{2} CH\ (1)$

Do: $\left.\begin{array}{l} AK \perp OC\ (AK \parallel SC) \\ OH \perp AH\ (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow KAH = COH\ (2)$

Từ $(1),(2)$ tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp

Gọi: $\begin{cases} BK \cap SC = \{T\} \\ AK \cap BC = \{P\} \end{cases}$

Ta có: $DAKH$ nội tiếp $\Rightarrow AHK = DAC$

Mà: $DAC = ABC = \dfrac{1}{2} AC$

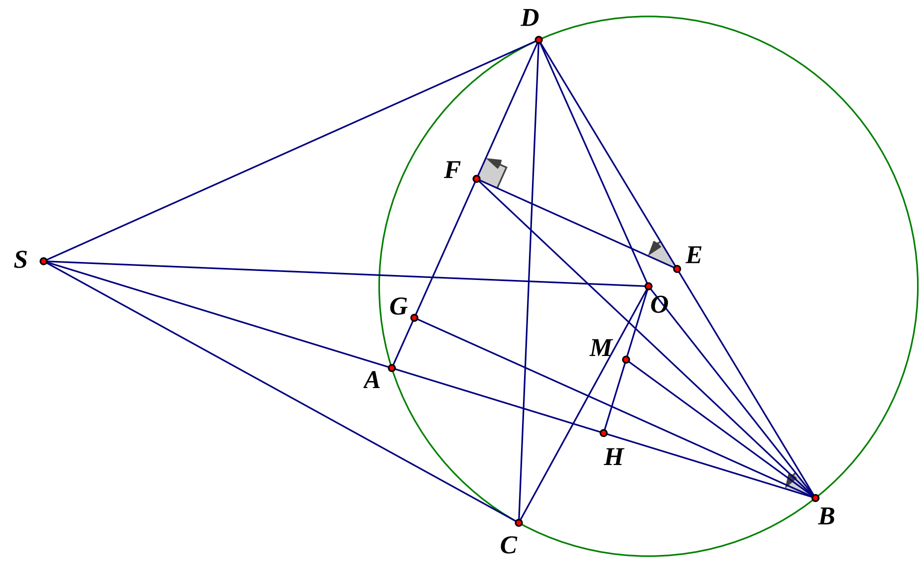
$\Rightarrow AHK = BAC$

$\Rightarrow HK \parallel BC$ (2 góc đồng vị)

Xét $\Delta ABP \Rightarrow K$ là trung điểm của AP

$\Rightarrow \dfrac{AK}{ST} = \dfrac{HK}{TD} \Rightarrow T$ là trung điểm của đoạn thẳng SC (đpcm)

4. Ta có $OA = OB$ nên ΔOAB cân đỉnh O.



Có OH là trung tuyến, đồng thời là phân giác của ΔOAB nên $BOH = \frac{1}{2} AOB$

Hay $BOH = \frac{1}{2} sđ\, AB$.

Ta có $BDA = \frac{1}{2} sđ\, AB$ (góc nội tiếp chắn cung AB).

Suy ra $BOH = BDA$ hay $BOH = EDF$.

Xét ΔOHB và ΔDFE có:

$OHB = DFE = 90^\circ$; $BOH = EDF$ (chứng minh trên).

Suy ra ΔOHB đồng dạng ΔDFE (góc - góc).

Nên ta có: $\frac{OH}{HB} = \frac{DF}{FE} \quad (1)$.

Gọi G là hình chiếu vuông góc của B trên AD, suy ra $BG \perp AD$.

Khi đó, ΔBDG có $FE // BG$ (cùng vuông góc với AD) nên $\frac{DF}{DG} = \frac{FE}{BG} = \frac{DE}{DB} = \frac{1}{2}$.

Suy ra F là trung điểm của DG và $\frac{DF}{FE} = \frac{DG}{BG} \qquad (2)$

Gọi M là trung điểm của OH.

Từ (1) và (2), ta có $\frac{OH}{HB} = \frac{DG}{BG}$ hay $\frac{2.MH}{HB} = \frac{2.FG}{BG} \Leftrightarrow \frac{MH}{HB} = \frac{FG}{BG}$.

Xét ΔBHM và ΔBGF có:

$BHM = BGF = 90^\circ$.

$\frac{MH}{HB} = \frac{FG}{BG}$ (chứng minh trên).

Suy ra ΔBHM đồng dạng ΔBGF (cạnh – góc – cạnh).

Do đó, ta có: $GFB = HMB$ (các góc tương ứng).

Hay $AFB = HMB$ $\quad\quad (3)$.

Xét đường tròn (O) có A, B, O, H là các điểm cố định.

Có M là trung điểm của OH nên M cố định.

Suy ra $BMH = \alpha$ không đổi.

Nên từ (3), suy ra AFB có số đo không đổi, hay điểm F luôn nhìn đoạn AB dưới góc không đổi α. Vậy điểm ΔBHM nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Do đó, khi điểm S di động trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn nằm trên đường tròn cố định là cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.

Bài I. ***(3,0 điểm) – 2019 - 2020***

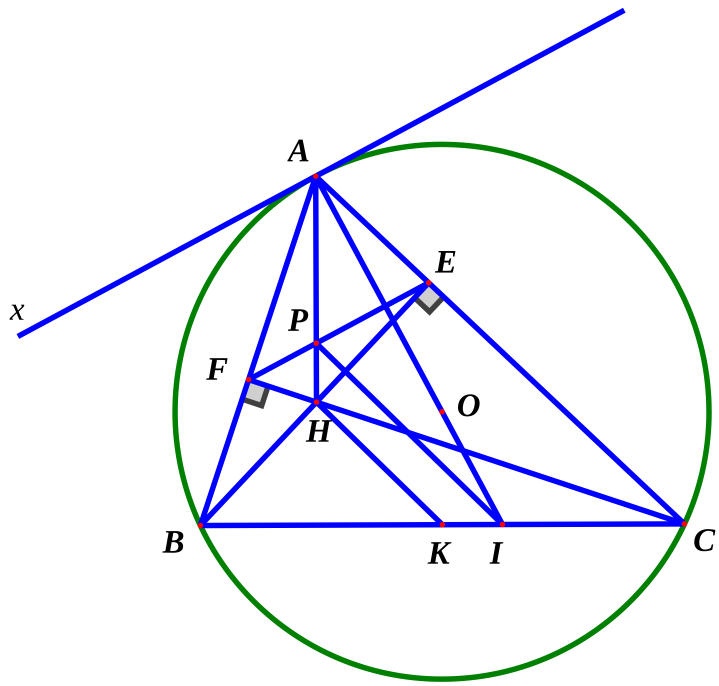
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Lời giải



1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$BEC = 90°$ (BE là đường cao)

$BFC = 90°$ (CF là đường cao)

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông).

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

Vẽ tiếp tuyến Ax như hình vẽ $\Rightarrow BAF = ACB$ (tính chất giữa đường tiếp tuyến và dây cung).

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow AFE = ACB$.

Ta suy ra $BAF = AFE \Rightarrow EF // Ax$ (do hai góc so le trong)

Lại có $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp EF$ (đpcm).

3) Chứng minh $\Delta APE \backsim \Delta ABI$

Ta có : $AEB = ABI$ (Vì $AEB + EFC = ABI + EFC = 180°$)

Mặt khác $APE + PAI = 90°$ (vì $AI \perp PE$)

$AIB + PAI = 90°$ (Vì $AH \perp BC$) $\Rightarrow APE = AIB$

Vậy $\Delta APE \backsim ABI$ (g-g).

* Chứng minh $KH // PI$

Gọi M là giao điểm của AO và EF, dung đường kính AS

Ta có $BE // CS$ cùng vuông góc AC

$BS // CF$ cùng vuông góc AB

$\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành nên H, K, S thẳng hàng

Ta có $AE.AC = AH.AD$ và $AE.AC = AM.AS$

$\Rightarrow AH.AD = AM.AS \Rightarrow \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta ASD \Rightarrow AHM = \Delta ASD$

$\Rightarrow HMSD$ Nội tiếp đường tròn

Kết hợp $PMID$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow PIM = PDM = HSM \Rightarrow HS // PI$.